Hörsaalübung zu Blatt 6 Differentialgleichungen II Produktansätze für die Wärmeleitungsgleichung

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

Ziel ist die Lösung von:

$$
\begin{aligned}
u_t - cu_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ t > 0,\ x \in (a,b) \text{ bei uns } (0,L) \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (a,b), \\
u(a,t) &= f(t) && t > 0, \\
u(b,t) &= g(t) && t > 0,
\end{aligned}
$$

c : Wärmeleitfähigkeit / Diffusionskoeffizient

Zunächst lösen wir für:

homogene DGL, homogene Randwerte, inhomogene Anfangswerte

$$\begin{aligned} &\tilde{v}_t - c\tilde{v}_{xx} = 0 && c > 0,\ t > 0,\ x \in (0, L),\ L > 0, \\ &\tilde{v}(x, 0) = v_0(x) && x \in (0, L) \\ &\tilde{v}(0, t) = \tilde{v}(L, t) = 0 && t > 0\,. \end{aligned}$$

v_0 nicht identisch Null, d.h $\tilde{v} \not\equiv 0$.

Produktansatz: $\tilde{v}(x, t) = q(t) \cdot p(x)$

Einsetzen in DGL:

$$\dot{q}(t) \cdot p(x) - c \cdot q(t) \cdot p''(x) = 0$$

Umsortierung ergibt:

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = c\,\frac{p''(x)}{p(x)} = -c\,\lambda$$

Zunächst: $p''(x) = -\lambda \cdot p(x)$.

Zur Erinnerung/ Hinweis zur Hausaufgabe 2
(vgl. Aufgabe 1 Präsenzblatt 1)

$\tilde{v}(0,t) = q(t) \cdot p(0) \stackrel{!}{=} 0 \implies p(0) =$

$\tilde{v}(L,t) = q(t) \cdot p(L) \stackrel{!}{=} 0 \implies p(L) =$

DGL: $p'' + \lambda \cdot p = 0 \longrightarrow$ Charakteristisches Polynom: $\mu^2 + \lambda = 0$

$\mu = \pm\sqrt{-\lambda} \longrightarrow$ allgemeine Lösung $ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

Außer für doppelte Nullstellen! Hier $\lambda = 0$

$$\lambda = 0 \Longrightarrow p(x) = a_0 e^{\sqrt{-0}x} + b_0 x e^{\sqrt{-0}x} = a_0 + b_0 x,$$

$$p(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$$

$$p(L) = 0 \Longrightarrow b_0 \cdot L = 0 \stackrel{L \neq 0}{\Longrightarrow} b_0 = 0$$

$$\lambda < 0 \Longrightarrow p(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$p(0) = 0 \Longrightarrow ae^0 + be^0 = 0 \Longrightarrow b = -a$$

$$p(L) = 0 \Longrightarrow a(e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) = 0 \overset{\lambda\neq 0}{\Longrightarrow} a = 0.$$

$$\lambda > 0 \Longrightarrow p(x) = \hat{a}e^{\sqrt{-\lambda}x} + \hat{b}e^{-\sqrt{-\lambda}x} = \hat{a}e^{i\sqrt{\lambda}x} + \hat{b}e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

reelle Darstellung: $p(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + b\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

$$p(0) = 0 \Longrightarrow a\cos(0) + b\sin(0) = a = 0$$

$$p(L) = 0 \Longrightarrow b\sin(\sqrt{\lambda}\,L) = 0 \overset{b,L\neq 0}{\Longrightarrow} \sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}$$

Nichttriviale Lösungen gibt es also nur für:

$$\boxed{\lambda_n = \left(\tfrac{n\pi}{L}\right)^2 = n^2\omega^2, \qquad n \in \mathbb{N},\, \omega = \frac{\pi}{L}}$$

Zugehörige Lösungen: $\boxed{p_n(x) = \sin(n\omega x) = \sin\left(\tfrac{n\pi}{L}x\right)}$

Mit diesen $\lambda-$Werten lösen wir die zweite DGL

$$\frac{\dot{q}_n(t)}{q_n(t)} = c\,\frac{p_n''(x)}{p_n(x)} = -\,c\cdot\lambda_n \iff \dot{q}_n(t) = -\,c\lambda_n q_n(t)$$

$$\dot{q}_n(t) = -\,c\left(\tfrac{n\pi}{L}\right)^2 q_n(t) = -\,c\,(\,n\omega\,)^2\,q_n(t), \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$\boxed{q_n(t) = e^{-c\lambda_n t = e^{-c\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}} = e^{-c\omega^2 n^2 t}}$$

Jede Funktion $\boxed{\tilde{v}_n(t) = p_n(x)\cdot q_n(t) = \sin(n\omega x)\,e^{-c\omega^2 n^2 t}}$

erfüllt die homogene Differentialgleichung und die homogenen Randbedingungen!

Jede Linearkombination $\alpha_n\tilde{v}_n + \alpha_m\tilde{v}_m$

erfüllt die homogene Differentialgleichung und die homogenen Randwerte!

Nachweis:

Auf dem Rand gilt:

$$(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)(0,t) = \alpha_n \underbrace{\tilde{v}_n(0,t)}_{=0} + \alpha_m \underbrace{\tilde{v}_m(0,t)}_{=0}$$
$$(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)(L,t) = \alpha_n \underbrace{\tilde{v}_n(L,t)}_{=0} + \alpha_m \underbrace{\tilde{v}_m(L,t)}_{=0}$$

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)_t - c\,(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)_{xx} \\
&= \alpha_n \cdot (\tilde{v}_n)_t + \alpha_m \cdot (\tilde{v}_m)_t - c\alpha_n (\tilde{v}_n)_{xx} - c\alpha_m (\tilde{v}_m)_{xx} \\
&= \alpha_n \underbrace{((\tilde{v}_n)_t - c(\tilde{v}_n)_{xx})}_{=0} + \alpha_m \underbrace{((\tilde{v}_m)_t - c(\tilde{v}_m)_{xx})}_{=0}
\end{aligned}$$

Frage: Wären Linearkombis von Lösungen auch bei inhomogener Dgl und/oder inhomogenen Randwerten auch Lösungen?

Jede endliche Linearkombination

$$\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

löst die Differentialgleichung und erfüllt die Randbedingungen.

Ohne Diskussion der Konvergenz machen wir den Ansatz:

$$\boxed{\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}$$

Zu erfüllen bleibt noch die Anfangsbedingung, die verlangt:

$$\tilde{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 \cdot 0} \sin(n\omega x) = v_0(x) \qquad x \in (0,L)$$

Also $$\boxed{\tilde{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sin(n\omega x) \overset{!}{=} v_0(x) \qquad x \in (0,L)}$$

Berechne die Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von v_0:

$$\boxed{\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin(n\omega x)\, dx.}$$

und erhalte damit als Lösung von

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}_t - c\tilde{v}_{xx} = 0 && c > 0,\ t > 0,\ x \in (0, L)\\
&\tilde{v}(x, 0) = v_0(x) && x \in (0, L)\\
&\tilde{v}(0, t) = \tilde{v}(L, t) = 0 && t > 0\,.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{v}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}$$

mit

$$\boxed{\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin(n\omega x)\, dx.}$$

Problem II) Inhomogene DGL, homogene Rand- und Anfangswerte

$$\begin{aligned}
&\hat{v}_t - c\hat{v}_{xx} = \tilde{h}(x,t) && c > 0,\ t > 0,\ x \in [0, L]\\
&\hat{v}(x,0) = 0, && x \in [0, L]\\
&\hat{v}(a,t) = \hat{v}(b,t) = 0 && t > 0.
\end{aligned}$$

Ansatz: $\hat{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) p_n(x)$

Wie oben: Homogene Randwerte werden erfüllt von: $p_n(x) = \sin(n\omega x)$

Ansatz lautet damit: $\hat{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\omega x)$

Wir setzen diesen Ansatz in die DGL

$\hat{v}_t - c\hat{v}_{xx} = \tilde{h}(x,t)$ ein und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t)\right] \sin(n\omega x) \stackrel{!}{=} \tilde{h}(x,t)$$

Fourier Reihe der ungeraden $2L-$period. Fortsetzung von $\tilde{h}(x,t)$ bzgl. x sei

$$F_{\tilde{h}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(n\omega x)$$

Koeffizientenvergleich liefert für jedes a_n eine lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) \stackrel{!}{=} c_n(t)$$

Die Lösung muss noch die Anfangswerte erfüllen

$$\hat{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin(n\omega x) \stackrel{!}{=} 0 \implies a_n(0) = 0$$

Man berechnet die $a_n(t)$, erhält $\hat{v}$.

$v := \tilde{v} + \hat{v}$ löst

$$\boxed{\begin{array}{ll} v_t - cv_{xx} = \tilde{h}(x,t) & c > 0,\ t > 0,\ x \in (0,L) \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in [0,L] \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 & t > 0. \end{array}}$$

Inhomogene Randdaten:

Ziel war die Lösung von

$$
\begin{aligned}
u_t - cu_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ t > 0,\ x \in (a,b) \text{ bei uns } (0,L) \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in [a,b], \\
u(a,t) &= f(t) && t > 0, \\
u(b,t) &= g(t) && t > 0,
\end{aligned}
$$

Bleibt das Problem der inhomogenen Randdaten!

Schritt 1) Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) := u(x,t) - \left[f(t) + \frac{x-a}{b-a}\,(g(t) - f(t)) \right]$$

$$v(a,t) = u(a,t) - \left[f(t) + \frac{a-a}{b-a}\,(g(t) - f(t)) \right]$$

$$v(b,t) = u(b,t) - \left[f(t) + \frac{b-a}{b-a}\,(g(t) - f(t)) \right]$$

Neue DGL für v mit $a = 0$ und $b = L$:

$$u(x,t) := v(x,t) + \left[f(t) + \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t)) \right]$$

$$u_t(x,t) := v_t(x,t) + \left[\dot{f}(t) + \frac{x}{L}\,(\dot{g}(t) - \dot{f}(t)) \right]$$

$$u_x(x,t) := v_x(x,t) + \left[0 + \frac{1}{L}\,(g(t) - f(t)) \right] \Longrightarrow u_{xx}(x,t) := v_{xx}(x,t)$$

DGL : $\quad v_t - cv_{xx} = h(x,t) - \left[\dot{f}(t) + \frac{x}{L}\left(\dot{g}(t) - \dot{f}(t)\right)\right] =: \tilde{h}(x,t)$

Neue Anfangswerte : $\quad v(x,0) = u(x,0) - \left[f(0) + \frac{x}{L}\left(g(0) - f(0)\right)\right] =: v_0(x).$

Neue Randwerte : $\quad v(0,t) = v(L,t) = 0.$

Das neue Problem besteht aus :

in der Regel inhomogener DGL,
in der Regel inhomogene Anfangswerte,
homogene Randdaten

Schritt 2) Löse die Aufgabe für v

Man kann (muss aber nicht) in zwei einfachere Probleme zerlegen.

Wir betrachten die zwei Aufgaben:

$$\begin{array}{ll}
I) & II) \\
\tilde{v}_t - c\tilde{v}_{xx} = 0 & \hat{v}_t - c\hat{v}_{xx} = \tilde{h}(x,t) \\
\tilde{v}(x,0) = v_0(x) & \hat{v}(x,0) = 0 \\
\tilde{v}(0,t) = \tilde{v}(L,t) = 0 & \hat{v}(a,t) = \hat{v}(b,t) = 0\,.
\end{array}$$

Schritt 3: Zusammensetzen zur Lösung des ursprünglichen Problems :

$$u(x,t) = \hat{v}(x,t) \,+\, \tilde{v}(x,t) \,+\, f(t) \,+\, \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t))$$

Beispiel 1: Alte Klausuraufgabe

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} && 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + 3\sin(6x) && 0 \leq x \leq \pi\,, \\
u(0,t) &= \frac{1}{t+1} && t > 0, \\
u(\pi,t) &= 0 && t > 0.
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Randwerte homogenisieren

$$
v(x,t) := u(x,t) - \left[f(t) + \frac{x-a}{b-a}\,(g(t) - f(t)) \right]
$$

Neue Aufgabe für $v(x,t) = u(x,t) - \dfrac{1}{t+1}\left(1 - \dfrac{x}{\pi}\right)$

DGL für u: $u_t - u_{xx} = \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2}$

$u_t(x,t) =$

$$u_t - u_{xx} = v_t - \tfrac{1}{(t+1)^2}\left(\tfrac{\pi-x}{\pi}\right) - v_{xx} \overset{!}{=} \tfrac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2}$$

DGL für v:

$v(x,0) =$

$$v(0,t) = u(0,t) - \frac{1}{t+1} =$$

$$v(\pi,t) = u(\pi,t) - \frac{1}{t+1}\left(1 - \frac{\pi}{\pi}\right) =$$

Diese Anfangsrandwertaufgabe mit homogener Differentialgleichung und homogenen Randwerten hat die Lösungsdarstellung

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x), \qquad \omega = \frac{\pi}{L} = 1,\ c = 1$$

Anfangswerte verlangen

$$v(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) =\; 3\sin(6x)$$

also $a_n =$

$v(x,t) =$

und

$u(x,t) = v(x,t) + \dfrac{1}{t+1}\left(1 - \dfrac{x}{\pi}\right) =$

Beispiel 2)

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad 0 < t,\ 0 < x < \pi/2,$$

$$u(x,0) = \sin(x) - \frac{2x}{\pi} \qquad 0 \le x \le \pi/2,$$

$$u(0,t) = 1 - e^{-t} \qquad t > 0.$$

$$u(\frac{\pi}{2},t) = 1 - e^{-t} \qquad t > 0.$$

Schritt 1) Randdaten homogenisieren

$$u(x,t) = v(x,t) + f(t) + \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t))$$

hier $\quad g(t) = f(t) = 1 - e^{-t}$, also $\boxed{\; u(x,t) = v(x,t) + 1 - e^{-t} \;}$

$$u_t = v_t + e^{-t} \qquad u_{xx} = v_{xx}$$

Neue DGL:

$$v(x,0) = u(x,0) - 1 + e^0 = u(x,0)$$

$$v(0,t) = v(\tfrac{\pi}{2},t) = 0$$

Neue Aufgabe mit homogenen Randdaten:

$$v_t - v_{xx} = -e^{-t} \qquad 0 < t,\ 0 < x < \pi/2,$$

$$v(x,0) = \sin(x) - \frac{2x}{\pi} \qquad 0 \le x \le \pi/2,$$

$$v(0,t) = v(\frac{\pi}{2},t) = 0 \qquad t > 0.$$

Es ist also $c = 1,\ L = \pi/2,\ \omega = \pi/L = 2.$

2.Schritt: Zerlegen $\boxed{v = \tilde{v} + \hat{v}}$

1. Teilaufgabe:

$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_{xx} = 0 \qquad 0 < t,\ 0 < x < \pi/2,$$

$$\tilde{v}(x,0) = \sin(x) - \frac{2x}{\pi} \qquad 0 \le x \le \pi/2,$$

$$\tilde{v}(0,t) = \tilde{v}(\frac{\pi}{2},t) = 0 \qquad t > 0.$$

Geschlossene Lösungsdarstellung:

$$\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-4n^2 t} \sin(2nx)$$

$$\tilde{v}(x,0) = \sin(x) - \frac{2x}{\pi}$$

mit $\quad \alpha_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L v_0(x) \sin(n\omega x)\, dx.$

also $\quad \alpha_n = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) - \frac{2x}{\pi}\right) \sin(2nx)\, dx.$

bzw. $\quad \alpha_n =$

Berechnung der Fourierkoeffizienten

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin(2nx)\,dx = \frac{2n(-1)^n}{1-4n^2}$$ (2 x part. oder Formelsammlung)

$$B_n = \int_0^{\pi/2} x\sin(2nx)\,dx = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{4n}$$ (1 x partiell oder Formelsammlung)

$$\alpha_n = \frac{4}{\pi}\left[A_n - \frac{2}{\pi}B_n\right] = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2n(-1)^n}{1-4n^2} - \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi(-1)^{n+1}}{4n}\right]$$

$$= \frac{8n(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} - \frac{8(-1)^{n+1}}{4n\pi} = \frac{2(-1)^n}{\pi}\left[\frac{4n}{(1-4n^2)} + \frac{1}{n}\right] = \frac{2(-1)^n}{n\pi(1-4n^2)}$$

$$\boxed{\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-4n^2t}\sin(2nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi(1-4n^2)} e^{-4n^2t}\sin(2nx))}$$

2. Teilaufgabe:

$$\hat{v}_t - \hat{v}_{xx} = -e^{-t} \qquad 0 < t,\ 0 < x < \pi/2,$$

$$\hat{v}(x,0) = 0 \qquad 0 \leq x \leq \pi/2,$$

$$\hat{v}(0,t) = \hat{v}(\frac{\pi}{2},t) = 0 \qquad t > 0.$$

Ansatz wie oben $\boxed{\hat{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(2nx)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\omega x)$

$$\hat{v}_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t) \sin(2nx)$$

$$\hat{v}_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}$$

DGL: $\sum_{n=1}^{\infty} (\qquad\qquad\qquad) \qquad\qquad = -e^{-t} \cdot 1$

Mit der Fourierreihe $F_{\tilde{h}}$ der ungeraden $\pi-$periodischen Fortsetzung von

$\tilde{h}(x,t) = -e^{-t}$, $x \in [0, \pi/2]$ **bzgl. x**

$$F_{\tilde{h}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(2nx), \qquad \text{mit} \qquad c_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{h}(x,t) \sin(2nx) dx$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{a}_n(t) + 4n^2 a_n(t) \right) \sin(2nx) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(2nx)$$

$$\Longrightarrow \dot{a}_n(t) + 4n^2 a_n(t) \stackrel{!}{=} c_n(t)$$

$$c_n(t) = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} -e^{-t} \sin(2nx) dx = \frac{4e^{-t}}{\pi} \int_0^{\pi/2} -\sin(2nx) dx$$

$$= \frac{4e^{-t}}{\pi} \left[\frac{\cos(2nx)}{2n} \right]_0^{\pi/2} = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \dfrac{-4e^{-t}}{n\pi} & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Die Anfangswerte verlangen:

$$\hat{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\sin(2nx) = 0 \qquad \text{Also: } a_n(0) =$$

Für gerade n erhalten wir

$$\dot{a}_n(t) + 4n^2 a_n(t) = 0\,, \quad a_n(0) = 0 \iff a_n(t) = 0\,.$$

Für ungerade n erhalten wir jeweils eine lineare inhomogene gewöhnliche Dgl:

$$\dot{a}_n(t) + 4n^2 a_n(t) = \frac{-4e^{-t}}{n\pi}$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

$$a_{n,h}(t) = \gamma_n e^{-4n^2 t}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl

$$\dot{a}_{n,p}(t) + 4n^2 a_{n,p}(t) = \frac{-4}{n\pi} \cdot e^{-t} = p(t) \cdot e^{\mu t}$$

Spezieller Ansatz (s. DGL I) : $a_{n,p}(t) = q(t) \cdot e^{\mu t}$

oder Variation der Konstanten: $a_{n,h}(t) = k \cdot e^{-4n^2 t} \Longrightarrow a_{n,p}(t) = k(t) \cdot e^{-4n^2 t}$

Spezieller Ansatz : $a_{n,p} = \beta e^{-t}$ liefert:

$$-\beta e^{-t} + 4n^2 \beta e^{-t} = -\frac{4e^{-t}}{n\pi} \implies \beta = \frac{-4}{n(4n^2-1)\pi}$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$a_n(t) = \; a_{n,p}(t) + a_{n,h}(t) = \; \frac{-4e^{-t}}{n(4n^2-1)\pi} \; + \; \gamma_n e^{-4n^2 t}$$

Aus der Anfangsbedingung $a_n(0) = 0$ folgt (immer noch n ungerade)

$$a_n(0) = \frac{-4}{n(4n^2-1)\pi} \; + \; \gamma_n = 0 \implies \; \gamma_n = \frac{4}{n(4n^2-1)\pi}$$

$$a_n(t) = \frac{-4e^{-t}}{n(4n^2-1)\pi} \; + \; \frac{4}{n(4n^2-1)\pi} e^{-4n^2 t} = \frac{4}{n(4n^2-1)\pi}\left(e^{-4n^2 t} - e^{-t}\right)$$

Insgesamt also $\boxed{a_n(t) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \dfrac{4}{n(4n^2-1)\pi}\left(e^{-4n^2 t} - e^{-t}\right) & n \text{ ungerade} \end{cases}}$

Zusammensetzung der Lösung: siehe Kästen:

$$u(x,t) = v(x,t) + 1 - e^{-t} = \tilde{v}(x,t) + \hat{v}(x,t) + 1 - e^{-t}$$

$$\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi(1-4n^2)} e^{-4n^2 t} \sin(2nx))$$

$$\hat{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(2nx)$$

$$a_n(t) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \dfrac{4}{n(4n^2-1)\pi}(e^{-4n^2 t} - e^{-t}) & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\hat{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)(4(2n-1)^2-1)\pi}(e^{-4(2n-1)^2 t} - e^{-t}) \sin(2(2n-1)x)$$

Zusammenstellung geschlossener Lösungsformeln (ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

I) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, homogen, homogene Randwerte

$$u_t - cu_{xx} = 0 \qquad c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad x \in [0, L],$$

$$u(0, t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(L, t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega x) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$ evtl. Koeffizientenvergleich

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^b u_0(x) \sin(n\omega x)\, dx$$ falls Koeff'nvergleich nicht möglich

II) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, inhomogen, homogene Randwerte:

$$
\begin{aligned}
&u_t - c u_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0 \\
&u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L) \\
&u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0
\end{aligned}
$$

Entweder: wie oben zerlegen

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_t - c\tilde{u}_{xx} = 0 \qquad 0 < t,\ 0 < x < L, \\
&\tilde{u}(x,0) = u_0(x) \qquad 0 \le x \le L, \\
&\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(L,t) = 0 \qquad t > 0.
\end{aligned}
$$

Also Typ I) und

$$\hat{u}_t - c\hat{u}_{xx} = h(x,t) \qquad 0 < t,\ 0 < x < L,$$

$$\hat{u}(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le L,$$

$$\hat{u}(0,t) = \hat{u}(L,t) = 0 \qquad t > 0.$$

$$\hat{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\sin(n\omega x) \qquad\qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

DGL: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\dot{a}_n(t) + a_n(t)\,\frac{cn^2\pi^2}{L^2})\sin(n\omega x) \overset{!}{=} h(x,t)$ evtl. Koeffizientenvergleich

$\displaystyle\frac{da_n(t)}{dt}(t) + a_n(t)\,\frac{cn^2\pi^2}{L^2} = c_n(t), \quad a_n(0) = 0$ falls Koeff'nvergleich nicht möglich

$\displaystyle c_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\,\sin(n\omega x)dx$ gewöhnliche Dgl's für die a_n

und dann summieren: $u = \hat{u} + \tilde{u}$

oder: direkt

$$u_t - cu_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, \sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{da_n(t)}{dt}(t) + a_n(t)\, \frac{cn^2\pi^2}{L^2} = c_n(t), \quad a_n(0) = b_n$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\, \sin(n\omega x) = u_0(x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$c_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x,t)\, \sin(n\omega x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x)\, \sin(n\omega x) dx$$

III) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, inhomogene Randwerte:

$$
\begin{aligned}
&u_t - c\,u_{xx} = h(x,t), \qquad && x \in (0,L),\ t > 0 \\
&u(x,0) = u_0(x), \qquad && x \in (0,L) \\
&u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad && t > 0
\end{aligned}
$$

Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogen : Fall I).
Falls neue Dgl. inhomogen : Fall II).