

Hörsaalübung zu Blatt 5 Differentialgleichungen II

Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum

Produktansätze, Fouriemethode

Anwendungsbeispiele:

Elektrisches Potential im ladungsfreien Raum,

Wärmeleitung im stationären (zeitunabhängigen) Fall,

stationäre, inkompressible, wirbelfreie Strömung z.B. in Kanälen,

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\delta\Omega$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \delta\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω , wenn

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Randbedingungen

Damit es eine eindeutige, stetig von den Daten abhängige Lösung der DGL gibt, braucht man noch Randdaten.

Dirichlet Randbedingungen: Lösung u ist auf dem Rand vorgegeben.

Neumann Randbedingungen: Ableitung $\partial_n u(x, y)$ ist auf dem Rand vorgegeben.

Auch ein gemischtes Problem ist möglich.

Beispiel : $u =$ Temperatur in einem Kreisring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

Temperatur wird innen konstant auf u_1 gehalten und auf dem äußeren Rand ist die Änderung der Temp. proportional zur Differenz der konstanten Außentemperatur u_A und der lokalen Temperatur $u(x, y)$:

$$u(x, y) = u_1 \quad \text{für } x^2 + y^2 = 1$$

$$\partial_n u(x, y) = k(u(x, y) - u_A) \quad \text{für } x^2 + y^2 = 4$$

Laplacegleichung auf Rechtecken mit Dirichlet Randbed.

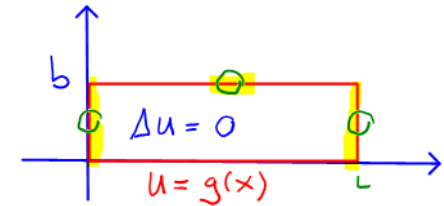
$$\Delta u = 0 \quad u \in (0, L) \times (0, b), \quad u = g \text{ auf Rand von } (0, L) \times (0, b).$$

Zunächst sei g auf drei Seiten des Rechtecks = 0. Zum Beispiel

$$\Delta u = 0 \quad u \in (0, L) \times (0, b),$$

$$u(0, y) = u(L, y) = u(x, b) = 0,$$

$$u(x, 0) = g(x) \text{ nicht identisch } 0.$$



Produktansatz: $u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$ liefert

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \text{ konstant}$$

hängt nur von x ab

hängt nur von y ab

müssen konstant sein

$$v_x = v'(x)w(y)$$

$$v_{xx} = v''(x) \cdot w(y)$$

$$\Rightarrow \frac{-v''(x)w(y)}{v \cdot w} = \frac{v(x)w''(y)}{v \cdot w}$$

$$\left. \begin{aligned} v''(x) &= -\lambda v(x) \\ w''(y) &= \lambda w(y) \end{aligned} \right\} \text{zwei gewöhnlich Dgl}$$

Die Randbedingungen liefern:

$$u(0, y) = v(0)w(y) \stackrel{u \neq 0}{=} 0 \implies v(0) = 0, \quad u(L, y) = v(L)w(y) \stackrel{u \neq 0}{=} 0 \implies v(L) = 0$$

Randwertaufgabe für v :

$$v''(x) = -\lambda \cdot v(x), \quad v(0) = v(L) = 0$$

Wegen $v(0) = v(L) = 0$ **nichttriviale** Lösungen nur möglich für

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}$$

Mit zugehörige Lösungen:

$$v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

(vgl. Aufgabe 1 Blatt 1 Präsenzaufgaben)

Mit diesen λ -Werten lösen wir die zweite DGL

$$w''(y) = \lambda_k w(y) = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 w(y)$$

$$w'' - \lambda_k w(y) = 0$$

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda_k = 0 \implies \mu = \pm \sqrt{\lambda_k} \implies e^{\sqrt{\lambda_k} y}, e^{-\sqrt{\lambda_k} y}$$

$v'' + \lambda v = 0 \quad p(\mu) = \mu^2 + \lambda = 0$
 $\mu = \pm \sqrt{-\lambda}$

$\lambda = 0 \quad v = ax + b$
 $\lambda < 0 \quad$ reelle Exponentialfunktionen

$\lambda > 0 \quad$ Sinus-/cosinusfunktionen

Randwerte: nur Sinus-fkt'n möglich (Blatt 1)

$v_k = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad v'_k = \frac{k\pi}{L} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

$v_k'' = \underbrace{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}_{-\lambda} \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}_{v_k(x)}$

$$w'' - \lambda_k w = 0 \implies w_k(y) = c_1 e^{\sqrt{\lambda_k} y} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda_k} y}$$

$$w_k = A_k e^{-\frac{k\pi}{L} y} + B_k e^{\frac{k\pi}{L} y}$$

Alternativ: $w_k = a_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L} y\right) + b_k \cosh\left(\frac{k\pi}{L} y\right)$

Hier wird der Ansatz mit der exp-Fkt weiter bearbeitet.

Die dritte Null-Randbedingung $u(x, b) = 0$ liefert:

$$A_k e^{-\frac{k\pi}{L} b} + B_k e^{\frac{k\pi}{L} b} = 0$$

$$A_k e^{-\frac{k\pi}{L} b} = -B_k e^{\frac{k\pi}{L} b}$$

$$u(x, b) = v(x) \cdot w(b) = 0 \xrightarrow{u \neq 0} \underline{w(b) = 0} \implies A_k = -e^{2\frac{k\pi}{L} b} B_k$$

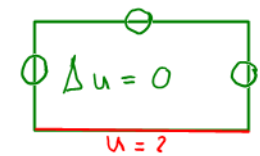
und damit

$$w_k(y) = B_k \left[\underbrace{-e^{2\frac{k\pi}{L} b}}_{A_k} e^{-\frac{k\pi}{L} y} + e^{\frac{k\pi}{L} y} \right]$$

Jede Funktion

$$\underline{u_k(x, y) = w_k(y) \cdot v_k(x) = B_k e^{\frac{k\pi}{L} b} \left[\underbrace{-e^{\frac{k\pi}{L} b} e^{-\frac{k\pi}{L} y}}_{w_k} + \underbrace{e^{-\frac{k\pi}{L} b} e^{\frac{k\pi}{L} y}}_{v_k} \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)}$$

löst die DGL. und erfüllt die drei Null Randbedingungen.



Superposition: Da die DGL linear und homogen ist und die Randbedingungen homogen sind, löst jede endliche Linearkombination

$$* \quad u(x, y) = \sum_{k=1}^n w_k(y) \cdot v_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(y-b)} - e^{-\frac{k\pi}{L}(y-b)} \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

die DGL. und erfüllt die drei Null Randbedingungen.

Zu erfüllen ist noch $u(x, 0) = g(x)$ also mit $n \rightarrow \infty$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{-\frac{k\pi}{L}b} - e^{\frac{k\pi}{L}b} \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = g(x) \quad x \in [0, L]$$

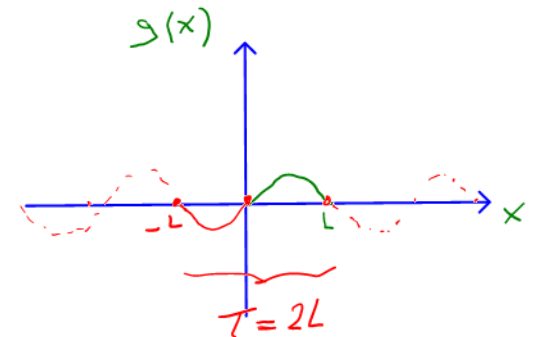
Setze g ungerade, $2L$ -periodisch Fort und bestimme **Fourier Reihe**

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\omega x)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2L}$$

$$\beta_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k\omega x) dx$$

$$\omega = \frac{\pi}{L}$$



$$\beta_k = \frac{2}{T} \int_{T/2}^{3T/2} g(x) \sin(k\omega x) dx \quad T=2L$$

$\frac{2}{T} = \frac{2}{2L} = 1/L$

Im Fall der glm. Konvergenz der beteiligten Reihen, sollte dann gelten:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = u(x, 0) \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \underbrace{\left[e^{-\frac{k\pi}{L}b} - e^{\frac{k\pi}{L}b} \right]}_{\beta_k} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Also:
$$c_k = \frac{\beta_k}{\left[e^{-\frac{k\pi}{L}b} - e^{\frac{k\pi}{L}b} \right]}$$

$c_k \left[\dots \right] \stackrel{!}{=} \beta_k$

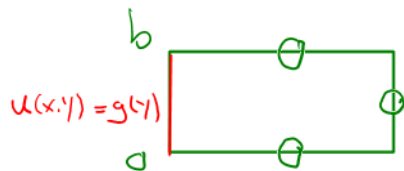
Unsere Lösung von letzter Seite:

$$\star u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(y-b)} - e^{-\frac{k\pi}{L}(y-b)} \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

oder mit $b_k = 2c_k$

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L}(y-b)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Sind die Nullranddaten anders verteilt, so muss der Ansatz angepasst werden.



$$w''(y) = \lambda w(y) \quad w(0), w(b) = 0$$

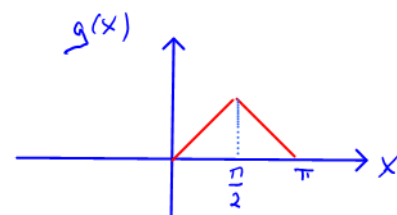
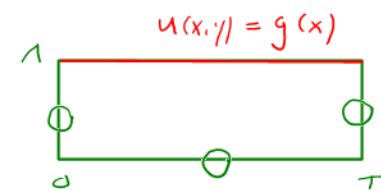
$$w_k(y) = \sin\left(k \frac{\pi}{b} y\right)$$

Beispiel A: $\Delta u = 0$ auf $R := (0, \pi) \times (0, 1)$

$$\underline{u(0, y)} = 0, \quad \underline{u(\pi, y)} = 0 \quad y \in [0, 1]$$

$$\underline{u(x, 0)} = 0, \quad x \in [0, \pi]$$

$$u(x, 1) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \quad \} \text{ } g(x)$$



Ansatz: $u = v(x)w(y)$ liefert $v'' = -\lambda v$.

Die Randwerte liefern für nichttriviale Lösungen

$$\underline{u(0, y)} = \underline{v(0)w(y)} = 0 \xrightarrow{w \neq 0} v(0) = 0, \quad \underline{u(\pi, y)} = \underline{v(\pi)w(y)} = 0 \xrightarrow{w \neq 0} v(\pi) = 0$$

Für v gleiche Aufgabe wie oben mit $L = \pi$. Nichttriviale Lösungen (vgl. Seite 5)

$$\underline{v_k(x)} = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \underline{\sin(kx)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} v'' &= -\lambda v \\ v(0) &= 0 \\ v(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

$$v_k(x) = \sin(kx) \implies \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{-k^2 \sin(kx)}{\sin(kx)} = -k^2 = -\Delta u$$

Nun muss gelten: $-\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} = k^2 = \Delta u$

Also: $w''(y) = k^2 w(y) \iff w''(y) - k^2 w(y) = 0$

$P(\mu) = \mu^2 - k^2 = 0$
 $\mu = \pm k$
 Lösungen e^{-ky}, e^{ky}

Charakteristisches Polynom:

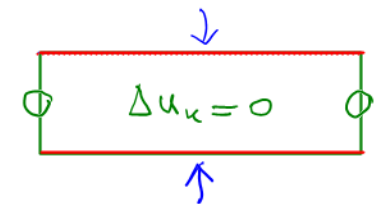
$w_k = A_k e^{-ky} + B_k e^{ky}$

$$u_k(x, y) = v_k(x) w_k(y)$$

$$u_k(x, 0) = v_k(x) \cdot w_k(0) = 0 \xrightarrow{v_k \neq 0} w_k(0) = 0 \implies$$

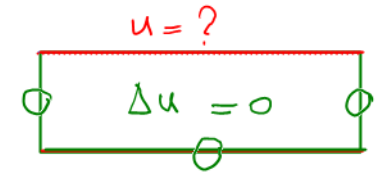
$$w_k(0) = A_k e^0 + B_k e^0 = A_k + B_k = 0 \implies B_k = -A_k$$

$$u_k(x, y) = \underbrace{\sin(kx)}_{v(x)} \cdot \underbrace{[A_k e^{-ky} - A_k e^{ky}]}_{w_k(y)}$$



Superposition:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{-ky} - e^{ky}) \sin(kx)$$



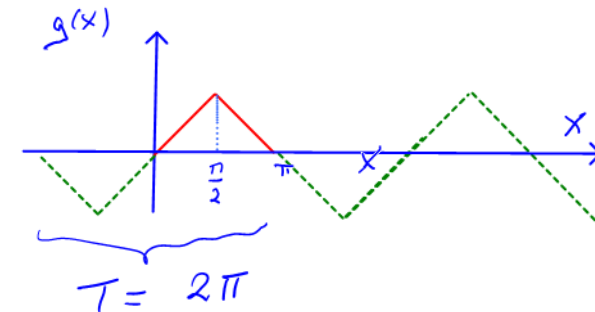
Zu erfüllen ist noch:

$$u(x, 1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{-k} - e^k) \sin(kx)}_{\text{Sinus Reihe}} \stackrel{!}{=} g(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Bestimme Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L = 2\pi$ -periodischen Fortsetzung der rechten Seite $g(x)$ bei Entwicklung in $\sin(\frac{k\pi}{L}x)$.

$$\beta_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k\omega x) dx \quad \omega = \frac{\pi}{L}$$

Hier $L = \pi$.



$$\omega = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$$

$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(kx) dx \quad \text{wobei: } g(x) := \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} x \sin(kx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(kx) dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[x \cdot \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \left(\frac{-\cos(kx)}{k} \right) dx \right)$$

$$+ \left[(\pi - x) \cdot \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{-\cos(kx)}{k} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\cancel{\frac{\pi}{2k} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi/2} + \cancel{\frac{\pi}{2k} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)} - \left[\frac{\sin(kx)}{k^2} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

Wir erhalten also für $g(x)$ die Fourierkoeffizienten $= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2} \right] - \left[-\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2} \right] \right)$

$$\beta_k = \frac{4}{\pi k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right),$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx).$$

Nach Seite 11:

~~✖✖~~

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{-ky} - e^{ky}) \sin(kx)$$

Zu erfüllen war noch

$$\underline{u(x, 1)} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{-k} - e^k) \sin(kx) \stackrel{!}{=} g(x)$$

Die Funktionen $\{\sin(kx), k \in \mathbb{N}\}$ bilden ein ONS! $\Rightarrow A_k (e^{-k} - e^k) = \beta_k$

Wir müssen also

$$A_k = \frac{\beta_k}{e^{-k} - e^k} \text{ w\u00e4hlen.}$$

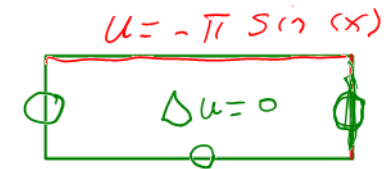
$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{4}{\pi k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}_{A_k} \cdot (e^{-ky} - e^{ky}) \sin(kx)$$

~~✖✖~~

Beispiel B: $\Delta u = 0$ auf $R := (0, \pi) \times (0, 1)$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = -\pi \sin(x) \quad x \in [0, \pi]$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0 \quad y \in [0, 1]$$



Wie oben nur mit einem anderen g . Wir hatten aus den Null-Randbedingungen:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{-ky} - e^{ky}) \sin(kx)$$

Zu erfüllen ist noch $u(x, 1) = -\pi \sin(x)$ also

$$u(x, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{-k} - e^k) \sin(kx) = -\pi \sin(x)$$

\downarrow \downarrow
 $k=1$ $A_1 (e^{-k} - e^k) \sin(x)$

Hier erhält man ohne Rechnung: mit Koeffizientenvergleich

$$\underline{A_1 [e^{-1} - e^1]} = -\pi, \quad A_k = 0 \text{ für } k \neq 1$$

$$\underline{u(x, 1) = -\pi \sin(x)} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} A_k (e^{-k} - e^k) \sin(kx)}_0 = \underline{-\pi \sin(x)}$$

$$u(x, y) = A_1 (e^{-1 \cdot y} - e^{1 \cdot y}) \sin(x)$$

und

$$u(x, y) = \frac{\pi(e^{-y} - e^y)}{e^1 - e^{-1}} \sin(x)$$

A_1

Was tun wenn die Randdaten nicht auf drei Seiten verschwinden?

Idee: Problem in maximal 4 Teilprobleme zerlegen, bei denen jeweils auf drei Kanten Null vorgegeben ist und auf der vierten die ursprünglichen Randdaten.

Teilprobleme lösen $\rightarrow u_1, u_2, u_3, u_4$, und addieren.

$$\Delta \left(\sum_{k=1}^4 u_k \right) = \sum_{k=1}^4 \Delta u_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^4 u_k (\text{Kante 1}) = u_1(\text{Kante 1}) + 0 + 0 + 0$$

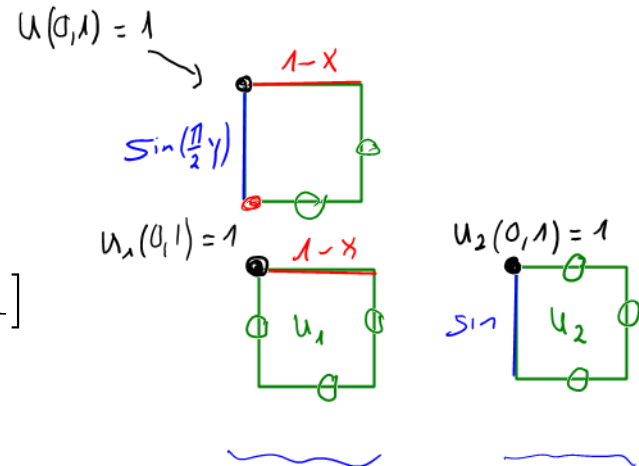
analog auf den anderen drei Seiten.

Ist also alles gut? Nur wenn ursprünglich in allen Ecken der Randwert Null vorgegeben ist!

Beispiel: $\Delta u = 0$ auf $(0, 1) \times (0, 1)$ mit

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 1 - x \quad x \in [0, 1]$$

$$u(0, y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right), \quad u(1, y) = 0 \quad y \in [0, 1]$$



zerlegung in $\Delta u_1 = 0$ auf $R := (0, 1) \times (0, 1)$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad u_1(x, 1) = 1 - x \quad x \in [0, 1]$$

$$u_1(0, y) = 0, \quad u_1(1, y) = 0 \quad y \in [0, 1]$$

und

$\Delta u_2 = 0$ auf $R := (0, 1) \times (0, 1)$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(x, 1) = 0 \quad x \in [0, 1]$$

$$u_2(0, y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right), \quad u_2(1, y) = 0 \quad y \in [0, 1]$$

lösen der Probleme und Addition der Ergebnisse brächte mit $u = u_1 + u_2$ auf den ersten Blick das richtige Ergebnis.

Aber:

- 1) Was ist mit den Randdaten für u_1 bzw. u_2 im Punkt $(0, 1)$?
- 2) Welchen Wert würde u in $(0, 1)$ annehmen? Vorgegeben war $u(0, 1) = 1$.

Ausweg: Man zieht zunächst eine bilineare **Eckenfunktion**

$$u_E(x, y) = a + bx + cy + dxy, \quad u = u_E \text{ in den Ecken}$$

von u ab. $v := u - u_E$ löst die DGL

$$\Delta v = \Delta u - \Delta u_E = 0$$

mit angepassten Daten, die in den Ecken verschwinden.

Löse maximal vier Probleme für $v \longrightarrow v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$

Die Lösung des ursprünglichen Problems ist $u = u_E + v$

Laplacegleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.



Beispiel: $v =$ Temperatur in einem Kreisring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 25$

Temperatur wird innen konstant auf u_1 gehalten und auf dem äußeren Rand ist die Änderung der Temp. proportional zur Differenz der konstanten Außentemperatur u_A und der lokalen Temperatur $u(x, y)$:

$$v(x, y) = u_1 \quad \text{für } x^2 + y^2 = 1$$

$$\partial_n v(x, y) = k(v(x, y) - u_A) \quad \text{für } x^2 + y^2 = 4$$

oder zum Beispiel:

Temperatur wird innen konstant auf u_1 gehalten und ist auf dem äußeren Rand gleich der konstanten Außentemperatur u_A

$$v(x, y) = u_1 \quad \text{für } x^2 + y^2 = 1 \quad \leftarrow$$

$$v(x, y) = u_A \quad \text{für } x^2 + y^2 = 25 \quad \leftarrow$$

Vernünftig: Polarkoordinaten

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad \text{und}$$

$$v(x(r, \phi), y(r, \phi)) = u(r, \phi).$$

Differentialgleichung muss umgerechnet werden:

$$u_r = v_x \cdot x_r + v_y \cdot y_r = \cos(\phi)v_x + \sin(\phi)v_y$$

Analog $u_{rr}, u_{\phi\phi}$
berechnen: Übungsaufgabe

usw. Man erhält (Beweis: Übungsaufgabe)

Laplace
in polar

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0 \iff r^2 (v_{xx} + v_{yy}) = 0.$$

Zu lösen ist dann:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0 \quad 1 < r < 5, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$\text{mit } u(\underbrace{1}_r, \phi) = u_1, \quad u(\underbrace{5}_r, \phi) = u_A$$

Laplace Operator in Polarkoordinaten:

$$\Delta u = 0 \iff r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0.$$

Produktansatz:
$$u(r, \phi) = w(r) \cdot v(\phi)$$

Neue Dgl.:
$$r^2 w'' \cdot v + r w' \cdot v + w \cdot v'' = 0$$

$$u_r = w' \cdot v \quad u_{rr} = w'' \cdot v$$

$$u_\phi = w \cdot v' \quad u_{\phi\phi} = w \cdot v''$$

Sortieren nach v und w :
$$v(r^2 w'' + r w') = -w \cdot v''$$

hängt nur von r ab $\implies \frac{r^2 w'' + r w'}{w} = -\frac{v''}{v} = \lambda$ konstant!

hängt nur von ϕ ab

$$r^2 w'' + r w' = \lambda w$$

$$\frac{1}{v \cdot w} \text{ in Dgl } (*)$$

System gewöhnlicher Dgl'n:

$$v''(\phi) = -\lambda v(\phi), \quad r^2 w''(r) + r w'(r) - \lambda w(r) = 0$$

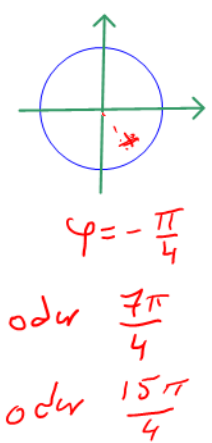
v sollte 2π -periodisch sein, daher kommen nur $\lambda_k = k^2$ und

$$v_k(\phi) = a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi), \quad k \in \mathbb{N}, \quad v_0(\phi) = a_0$$

in Frage.

$v'' = -\lambda v \implies$ linear: nur konstante periodisch
 Exponentialfkt: nicht periodisch

2π periodisch $\implies \cos/\sin \quad v'' = (\sin(kx))'' = (k)^2 (-\sin(kx))$



Gleichung für die passenden w_k lautet

$\lambda = k^2$
 2 Dgl $r^2 w'' + r w' - k^2 w = 0$

$(**)$ $r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w(r) = 0$

$k = 0$: $r^2 w'' + r w' = 0 \Rightarrow w'' = -\frac{1}{r} w' \Rightarrow w' = \frac{d_0}{r} \xrightarrow{\int \dots dr} w_0 = c_0 + d_0 \ln(r)$

$\frac{dz}{dr} = z'(r) = -\frac{1}{r} z(r) = \frac{-z}{r} \rightarrow z = \frac{d_0}{r}$
 separierbare Dgl

$k \neq 0$: Eulersche Dgl.: Substitution $r = e^t$ oder Ansatz $w(r) = r^\gamma$

liefert $w_k(r) = c_k r^{-k} + d_k r^k$

$w' = \gamma \cdot r^{\gamma-1}$ $w'' = \gamma(\gamma-1) r^{\gamma-2}$

$(**)$ $r^2 \cdot \gamma(\gamma-1) r^{\gamma-2} + r \cdot \gamma \cdot r^{\gamma-1} - k^2 r^\gamma = 0$
 $\Rightarrow \gamma^2 - \gamma + \gamma - k^2 = 0$ $\gamma = \pm k$

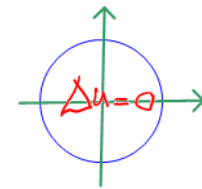
Jede Funktion $w_k \cdot v_k$ löst die DGL. Da die Dgl linear und homogen ist, ist Jede lineare Kombination auch eine Lösung

Allgemeiner Ansatz bei Außen-/Innenraum eines Kreises, bei Ringen, bei Kreis-/Ringsegmenten

$$u(r, \phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k) (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$$

**Je nach Gebiet werden nur Teile dieser allgemeinen Lösung verwendet
man sucht nach beschränkte Lösungen!**

Um beschränkte Lösungen zu erhalten setzt man



- im **Innenraum**:

$$\Delta u = 0 \quad \text{für } x^2 + y^2 < R^2, \quad u(x, y) = u_R(x, y), \quad \text{auf } x^2 + y^2 = R^2.$$

Setze: $c_k = 0$ und $d_0 = 0$.

$$\text{Es bleibt: } u(r, \phi) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k d_k) r^k \cos(k\phi) + (b_k d_k) r^k \sin(k\phi)$$

Damit das rechnen später schöner wird setzen wir

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad a_k d_k = \frac{A_k}{R^k} \text{ also } A_k = a_k d_k R^k$$

und erhalten den Ansatz:

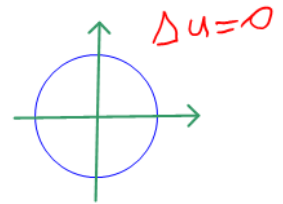
$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

- im **Außenraum**:

$$\Delta u = 0 \quad \text{für } x^2 + y^2 > R^2, \quad u(x, y) = u_R(x, y), \quad \text{auf } x^2 + y^2 = R^2.$$

Setze $d_k = 0$ und erhalte analog:

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$



- im **Ring** mit RWE $u(R_1, \phi) = u_1(\phi)$, $u(R_2, \phi) = u_2$

volle Ansatzfunktion.

Koeffizienten über die zwei Randbedingungen bestimmen!

- im **(Ring-)Sektor**: Wenn auf mehr als einem Randstück Randdaten $\neq 0$ zerlegt man notfalls, wie beim Rechteck (Beispiel B). Ansatzfunktionen müssen evtl angepasst werden.

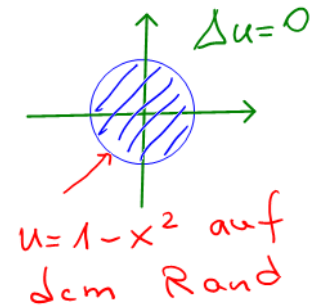
Beispiel:

$$\Delta u = 0 \quad \text{für } x^2 + y^2 > 9, \quad \underline{u(x, y) = 1 - x^2, \text{ auf } x^2 + y^2 = 9.}$$

$3 < r < \infty$

Allgemeiner Ansatz auf dem Außenraum $x^2 + y^2 > R^2$:

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$



Randwerte: $u(x, y) = 1 - x^2$, auf $x^2 + y^2 = R^2 = 9$

$r=3 \quad \phi \in [0, 2\pi]$

Mit $x = r \cos(\phi)$ folgt

$$u(R, \phi) = u(3, \phi) = 1 - (3 \cos(\phi))^2 = 1 - 9 \cos^2(\phi) =: \underline{\underline{u_0(\phi)}}$$

$$u(R, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{R} \right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)) \stackrel{!}{=} u_0(\phi)$$

Das ist gerade die Fourierreihe von $u_0(\phi)$. Im allgemeinen Fall:

$$u_0(\phi) \stackrel{!}{=} \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)$$

berechne: $A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \cos(k\phi) d\phi$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \sin(k\phi) d\phi$$

Fourier
Koeffiz'n

und erhalte die Lösung

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

In unserem Beispiel:

$$u(3, \phi) = 1 - 9 \cos^2(\phi) = 1 - 9 \cdot \left(\frac{1 + \cos(2\phi)}{2}\right) = u_0(\phi)$$

$$\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$$

$$\cos(2\varphi) = 2\cos^2(\varphi) - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2(\varphi) = \frac{\cos(2\varphi) + 1}{2}$$

Andererseits nach unserer Lösungsformel:

$$u(3, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

Im allgemeinen Fall müssten wir jetzt berechnen:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 9 \cos^2(\phi)) \cos(k\phi) d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 9 \cos^2(\phi)) \sin(k\phi) d\phi$$

Alternativ: Nutze $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$

$$u(3, \phi) = u_0(\phi) = 1 - 9 \cos^2(\phi) = 1 - 9 \cdot \left(\frac{1 + \cos(2\phi)}{2} \right) = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} \cos(2\phi)$$

$$u(3, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)) \stackrel{!}{=} -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} \cos(2\phi)$$

Koeffizientenvergleich liefert die Fourierkoeffizienten von u_0

 $\frac{A_0}{2} = -\frac{7}{2}, \quad A_2 = -\frac{9}{2}, \quad A_k = B_k = 0 \text{ sonst.}$

Wir hatten:

$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$

Damit erhalten wir die Lösung

$u(r, \phi) = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} \left(\frac{3}{r}\right)^2 \cos(2\phi).$

 $u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + A_2 \cos(2\phi) \left(\frac{R}{r}\right)^2$
 $= -\frac{7}{2} + \frac{9}{2} \cos(2\phi) \left(\frac{3}{r}\right)^2$

Lösung in kartesischen Koordinaten :

Wir haben $u(r, \phi) = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} \left(\frac{3}{r}\right)^2 \cos(2\phi).$

$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi). \Rightarrow \cos(\phi) = \frac{x}{r}, \quad \sin(\phi) = \frac{y}{r}$

Nutze $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}$

$u(x, y) = -\frac{7}{2} - \frac{81}{2(x^2 + y^2)} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$