Hörsaalübung zu Blatt 5 Differentialgleichungen II

Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum Produktansätze, Fouriermethode

Anwendungsbeispiele:

Elektrisches Potential im ladungsfreien Raum,

Wärmeleitung im stationären (zeitunabhängigen) Fall,

stationäre, inkompressible, wirbelfreie Strömung z.B. in Kanälen,

Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\delta\Omega$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \delta\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \forall\,(x,y) \in \Omega}$$

Randbedingungen

Damit es eine eindeutige, stetig von den Daten abhängige Lösung der DGL gibt, braucht man noch Randdaten.

Dirichlet Randbedingungen: Lösung u ist auf dem Rand vorgegeben.

Neumann Randbedingungen: Ableitung $\partial_n u(x,y)$ ist auf dem Rand vorgegeben.

Auch ein gemischtes Problem ist möglich.

Beispiel : $u =$ Temperatur in einem Kreisring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

Temperatur wird innen konstant auf u_1 gehalten und auf dem äußeren Rand ist die Änderung der Temp. proportional zur Differenz der konstanten Außentemperatur u_A und der lokalen Temperatur $u(x, y)$:

$$u(x, y) \; = \; u_1 \qquad \text{für } \; x^2 + y^2 = 1$$

$$\partial_n u(x, y) \; = \; k(u(x, y) - u_A) \qquad \text{für } \; x^2 + y^2 = 4$$

Laplacegleichung auf Rechtecken mit Dirichlet Randbed.

$$\Delta u = 0 \qquad u \in (0,L) \times (0,b)\,, \qquad u = g \text{ auf Rand von} (0,L) \times (0,b)\,.$$

Zunächst sei g auf drei Seiten des Rechtecks $= 0$. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \qquad u \in (0,L) \times (0,b)\,,\\ &u(0,y) = u(L,y) = u(x,b) = 0,\\ &u(x,0) = g(x) \text{ nicht identisch 0.} \end{aligned}$$

Produktansatz: $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$ liefert

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0,$$

$$\Longrightarrow -\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(y)}{w(y)} =$$

Die Randbedingungen liefern:

$$u(0,y) = v(0)w(y) = 0 \overset{u \not\equiv 0}{\Longrightarrow} v(0) = 0, \quad u(L,y) = v(L)w(y) = 0 \overset{u \not\equiv 0}{\Longrightarrow} v(L) = 0$$

Randwertaufgabe für v: $\boxed{v''(x) \; = \; -\lambda \cdot v(x), \qquad v(0) = v(L) = 0}$

Wegen $v(0) = v(L) = 0$ **nichttriviale** Lösungen nur möglich für

$$\boxed{\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \, k \in \mathbb{N}}$$

Mit zugehörige Lösungen: $\boxed{v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}$

(vgl. Aufgabe 1 Blatt 1 Präsenzaufgaben)

Mit diesen $\lambda-$Werten lösen wir die zweite DGL

$$w''(y) = \lambda_k w(y) = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 w(y)$$

$$w'' - \lambda_k w = 0 \Longrightarrow w_k(y) = c_1 e^{\sqrt{\lambda_k} y} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda_k} y}$$

$$\boxed{w_k = A_k e^{-\frac{k\pi}{L} y} + B_k e^{\frac{k\pi}{L} y}}$$

Alternativ: $w_k = a_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L} y\right) + b_k \cosh\left(\frac{k\pi}{L} y\right)$
Hier wird der Ansatz mit der exp-Fkt weiter bearbeitet.

Die dritte Null-Randbedingung $u(x,b) = 0$ liefert:

$$u(x,b) = v(x) \cdot w(b) = 0 \stackrel{u \not\equiv 0}{\Longrightarrow} w(b) = 0 \Longrightarrow A_k = -e^{2\frac{k\pi}{L} b} B_k$$

und damit $\boxed{w_k(y) = B_k \left[-e^{2\frac{k\pi}{L} b} e^{-\frac{k\pi}{L} y} + e^{\frac{k\pi}{L} y}) \right]}$

Jede Funktion

$$u_k(x,y) = w_k(y) \cdot v_k(x) = B_k e^{\frac{k\pi}{L} b} \left[-e^{\frac{k\pi}{L} b} e^{-\frac{k\pi}{L} y} + e^{-\frac{k\pi}{L} b} e^{\frac{k\pi}{L} y}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L} x)$$

löst die DGL. und erfüllt die drei Null Randbedingungen.

Superposition: Da die DGL linear und homogen ist und die Randbedingungen homogen sind, löst jede endliche Linearkombination

$$\boxed{u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{n} w_k(y)\cdot v_k(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(y-b)} \;-\; e^{-\frac{k\pi}{L}(y-b)}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x)}$$

die DGL. und erfüllt die drei Null Randbedingungen.

Zu erfüllen ist noch $u(x,0) = g(x)$ also mit $n \to \infty$

$$u(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{-\frac{k\pi}{L}b} \;-\; e^{\frac{k\pi}{L}b} \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x) \;=\; g(x) \qquad x \in [0,L]$$

Setze g ungerade, $2L$-periodisch Fort und bestimme Fourier Reihe

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\omega x)$$

$$\beta_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k\omega x)\, dx \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

Im Fall der glm. Konvergenz der beteiligten Reihen, sollte dann gelten:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{-\frac{k\pi}{L}b} - e^{\frac{k\pi}{L}b} \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

Also: $$c_k = \frac{\beta_k}{e^{-\frac{k\pi}{L}b} - e^{\frac{k\pi}{L}b}}$$

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(y-b)} - e^{-\frac{k\pi}{L}(y-b)}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x)}$$

oder mit $b_k = 2c_k$ $$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L}(y-b)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}$$

Sind die Nullranddaten anders verteilt, so muss der Ansatz angepasst werden.

Beispiel A: $\Delta u = 0$ auf $R := (0,\pi) \times (0,1)$

$$u(0,y) = 0\,, \quad u(\pi,y) = 0 \qquad y \in [0,1]$$

$$u(x,0) = 0\,, \qquad x \in [0,\pi]$$

$$u(x,1) = \begin{cases} x & x \in [0,\frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$$

Ansatz: $u = v(x)w(y)$ liefert $v'' = -\lambda\, v$.

Die Randwerte liefern für nichttriviale Lösungen

$$u(0,y) = v(0)w(y) = 0 \overset{u\not\equiv 0}{\Longrightarrow} v(0) = 0, \quad u(\pi,y) = v(\pi)w(y) = 0 \overset{u\not\equiv 0}{\Longrightarrow} v(\pi) = 0$$

Für v gleiche Aufgabe wie oben mit $L = \pi$. Nichttriviale Lösungen (vgl. Seite 5)

$$v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sin(kx), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

$$v_k(x) = \sin(kx) \implies \frac{v''(x)}{v(x)} =$$

Nun muss gelten: $-\dfrac{v''(x)}{v(x)} = \dfrac{w''(y)}{w(y)} =$

Also: $w''(y) = k^2 w(y) \iff w''(y) - k^2 w(y) = 0$

Charakteristisches Polynom:

$$w_k = A_k e^{-ky} + B_k e^{ky}$$

$$u_k(x,y) =$$

$$u_k(x,0) = v_k(x) \cdot w_k(0) = 0 \stackrel{u \not\equiv 0}{\implies} w_k(0) = 0 \implies$$

$$u_k(x,y) =$$

Superposition:

$$u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k(e^{-ky} \;-\; e^{ky})\;\sin(kx)$$

Zu erfüllen ist noch:

$$u(x,1) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k(e^{-k} \;-\; e^{k})\;\sin(kx) \;=\; g(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Bestimme Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L = 2\pi-$periodisechen Fortsetzung der rechten Seite $g(x)$ bei Entwicklung in $\sin(\frac{k\pi}{L}x)$.

$$\beta_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin(k\omega x)\,dx \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

Hier $L = \pi$.

$$\beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx \qquad \text{wobei: } g(x) := \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin(kx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\sin(kx)\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[x \cdot \frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot (\frac{-\cos(kx)}{k})\,dx\right.$$

$$\left. + \left[(\pi - x) \cdot \frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k}\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2k} \cdot \cos(\frac{k\pi}{2}) + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2})\right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2k} \cdot \cos(\frac{k\pi}{2}) - \left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right)$$

Wir erhalten also für $g(x)$ die Fourierkoeffizienten

$$\beta_k = \frac{4}{\pi k^2} \sin(\tfrac{k\pi}{2}), \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx).$$

Nach Seite 11: $$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(e^{-ky} - e^{ky}) \sin(kx)$$

Zu erfüllen war noch $$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(e^{-k} - e^{k}) \sin(kx) = g(x)$$

Die Funktionen $\{\sin(kx),\ k \in \mathbb{N}\}$ bilden ein ONS!

Wir müssen also $A_k = \dfrac{\beta_k}{e^{-k} - e^k}$ wählen.

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{4}{\pi k^2} \sin(\frac{k\pi}{2})}{e^{-k} - e^k} \cdot \left(e^{-ky} - e^{ky}\right) \sin(kx)$$

Beispiel B: $\Delta u = 0$ auf $R := (0,\pi) \times (0,1)$

$u(x,0) = 0\,, \quad u(x,1) = -\pi \sin(x) \qquad x \in [0,\pi]$

$u(0,y) = 0\,, \quad u(\pi,y) = 0 \qquad y \in [0,1]$

Wie oben nur mit einem anderen g. Wir hatten aus den Null-Randbedingungen:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(e^{-ky} - e^{ky}) \sin(kx)$$

Zu erfüllen ist noch $u(x,1) = -\pi \sin(x)$ also

$$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(e^{-k} - e^{k}) \sin(kx) = -\pi \sin(x)$$

Hier erhält man ohne Rechnung:

$$A_1[e^{-1} - e^1] = -\pi\,, \qquad A_k = 0 \text{ für } k \neq 1$$

und $$\boxed{u(x,y) = \frac{\pi(e^{-y} - e^{y})}{e^{1} - e^{-1}} \sin(x)}$$

Was tun wenn die Randdaten nicht auf drei Seiten verschwinden?

Idee: Problem in maximal 4 Teilprobleme zerlegen, bei denen jeweils auf drei Kanten Null vorgegeben ist und auf der vierten die ursprünglichen Randdaten.

Teilprobleme lösen $\longrightarrow u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,$ und addieren.

$$\Delta\left(\sum_{k=1}^{4} u_k\right) = \sum_{k=1}^{4} \Delta u_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{4} u_k \text{ (Kante 1)} = u_1(\text{ Kante 1 }) + 0 + 0 + 0$$

analog auf den anderen drei Seiten.

Ist also alles gut? Nur wenn ursprünglich in allen Ecken der Randwert Null vorgegeben ist!

Beispiel: $\Delta u = 0$ auf $(0,1) \times (0,1)$ mit

$$u(x,0) = 0\,, \quad u(x,1) = 1 - x \qquad x \in [0,1]$$

$$u(0,y) = \sin(\tfrac{\pi}{2} y)\,, \quad u(1,y) = 0 \qquad y \in [0,1]$$

zerlegung in $\Delta u_1 = 0$ auf $R := (0,1) \times (0,1)$

$$u_1(x,0) = 0\,, \quad u_1(x,1) = 1 - x \qquad x \in [0,1]$$

$$u_1(0,y) = 0\,, \quad u_1(1,y) = 0 \qquad y \in [0,1]$$

und

$\Delta u_2 = 0$ auf $R := (0,1) \times (0,1)$

$$u_2(x,0) = 0\,, \quad u_2(x,1) = 0 \qquad x \in [0,1]$$

$$u_2(0,y) = \sin(\tfrac{\pi}{2} y)\,, \quad u_2(1,y) = 0 \qquad y \in [0,1]$$

lösen der Probleme und Addition der Ergebnisse brächte mit $u = u_1 + u_2$ auf den ersten Blick das richtige Ergebnis.

Aber:

1) Was ist mit den Randdaten für u_1 bzw. u_2 im Punkt $(0,1)$?
2) Welchen Wert würde u in $(0,1)$ annehmen? Vorgegeben war $u(0,1) = 1$.

Ausweg: Man zieht zunächst eine bilineare **Eckenfunktion**

$$u_E(x,y) = a + bx + cy + dxy, \qquad u = u_E \text{ in den Ecken}$$

von u ab. $v := u - u_E$ löst die DGL

$\Delta v = \Delta u - \Delta u_E = 0$

mit angepassten Daten, die in den Ecken verschwinden.

Löse maximal vier Probleme für $v \longrightarrow v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$

Die Lösung des ursprünglichen Problems ist $\quad u = u_E + v$

Laplacegleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.

Beispiel: $v =$ Temperatur in einem Kreisring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 25$

Temperatur wird innen konstant auf u_1 gehalten und auf dem äußeren Rand ist die Änderung der Temp. proportional zur Differenz der konstanten Außentemperatur u_A und der lokalen Temperatur $u(x, y)$:

$$v(x, y) = u_1 \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 1$$

$$\partial_n v(x, y) = k(v(x, y) - u_A) \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 4$$

oder zum Beispiel:

Temperatur wird innen konstant auf u_1 gehalten und ist auf dem äußeren Rand gleich der konstanten Außentemperatur u_A

$$v(x, y) = u_1 \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 1$$

$$v(x, y) = u_A \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 25$$

Vernünftig: Polarkoordinaten $\quad x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, und

$v(x(r,\phi), y(r,\phi)) \;=\; u(r,\phi)$.

Differentialgleichung muss umgerechnet werden:

$u_r = \; v_x \cdot x_r + v_y \cdot y_r = \; \cos(\phi)v_x + \sin(\phi)v_y$

usw. Man erhält (Beweis: Übungsaufgabe)

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \iff r^2\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \;=\; 0\,.$$

Zu lösen ist dann:

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \qquad 1 < r < 5,\ 0 \le \phi \le 2\pi$

mit $u(1,\phi) = u_1\,, \qquad u(5,\phi) = \; u_A$

Laplace Operator in Polarkoordinaten:

$$\boxed{\Delta u \;=\; 0 \iff r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} \;=\; 0\,.}$$

Produktansatz: $\boxed{u(r,\phi) = \; w(r) \cdot v(\phi)}$

Neue Dgl.: $\quad r^2 w'' \cdot v \,+\, r w' \cdot v \,+\, w \cdot v'' \;=\; 0$

Sortieren nach v und w: $\qquad v(r^2 w'' \,+\, r w') \;=\; -w \cdot v''$

$$\Longrightarrow \frac{r^2 w'' \,+\, r w'}{w} \;=\; -\,\frac{v''}{v} \;=\; \lambda.$$

System gewöhnlicher Dgl'n:

$$\boxed{v''(\phi) \;=\; -\lambda v(\phi)\,, \qquad r^2 w''(r) \,+\, r w'(r) \,-\, \lambda w(r) = 0}$$

v sollte $2\pi-$periodisch sein, daher kommen nur $\lambda_k = k^2$ und

$$\boxed{v_k(\phi) \;=\; a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi)\,, \quad k \in \mathbb{N}, \quad v_0(\phi) = a_0}$$

in Frage.

Gleichung für die passenden w_k lautet

$$r^2 w''(r) \, + \, r w'(r) \, - \, k^2 w(r) = 0$$

$\underline{k = 0:}$ $$w'' = -\tfrac{1}{r} w' \Longrightarrow w' = \frac{d_0}{r} \Longrightarrow \boxed{\; w_0 = \; c_0 + d_0 \ln(r)\,.}$$

$\underline{k \neq 0:}$ Eulersche Dgl.: Substitution $r = e^t$ oder Ansatz $w(r) = r^\gamma$

liefert $$\boxed{\; w_k(r) \; = \; c_k r^{-k} \, + \, d_k r^k \;}$$

Jede Funktion $w_k \cdot v_k$ löst die DGL. Da die Dgl linear und homogen ist, ist Jede lineare Kombination auch eine Lösung

Allgemeiner Ansatz bei Außen–/Innenraum eines Kreises, bei Ringen, bei Kreis-/ Ringsegmenten

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) \, + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} \, + \, d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) \, + \, b_k \sin(k\phi))}$$

Je nach Gebiet werden nur Teile dieser allgemeinen Lösung verwendet

man sucht nach beschränkte Lösungen!

Um beschränkte Lösungen zu erhalten setzt man

- im **Innenraum:**

  $\Delta u \;=\; 0$ für $x^2 + y^2 < R^2,$ $\quad u(x,y) = u_R(x,y),$ auf $x^2 + y^2 = R^2$.

  Setze: $c_k = 0$ und $d_0 = 0$.

  Es bleibt: $u(r,\phi) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k d_k) r^k \cos(k\phi) \;+\; (b_k d_k) r^k \sin(k\phi))$

  Damit das rechnen später schöner wird setzen wir

  $c_0 = \dfrac{A_0}{2}, \; a_k d_k \;=\; \frac{A_k}{R^k}$ also $A_k \;=\; a_k d_k R^k$

  und erhalten den Ansatz:

$$\boxed{u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (A_k \cos(k\phi) \;+\; B_k \sin(k\phi))}$$

- im **Außenraum:**

  $\Delta u \;=\; 0 \qquad$ für $x^2+y^2>R^2, \qquad u(x,y)=u_R(x,y),$ auf $x^2+y^2=R^2$.

  Setze $d_k=0$ und erhalte analog:

  $$\boxed{u(r,\phi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^k\left(A_k\cos(k\phi)\;+\;B_k\sin(k\phi)\right)}$$

- im **Ring** mit RWE $u(R_1,\phi)=u_1(\phi), \quad u(R_2,\phi)=u_2$

  volle Ansatzfunktion.

  Koeffizienten über die zwei Randbedingungen bestimmen!

- im **(Ring-)Sektor**: Wenn auf mehr als einem Randstück Randdaten $\neq 0$ zerlegt man notfalls, wie beim Rechteck (Beispiel B). Ansatzfunktionen müssen evtl angepasst werden.

Beispiel:

$\Delta u \ = \ 0 \qquad$ für $x^2 + y^2 > 9, \qquad u(x,y) = 1 - x^2,$ auf $x^2 + y^2 = 9.$

Allgemeiner Ansatz auf dem Außenraum $x^2 + y^2 > R^2$ **:**

$$\boxed{u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k \left(A_k \cos(k\phi) \ + \ B_k \sin(k\phi)\right)}$$

Randwerte: $u(x,y) = 1 - x^2,$ auf $x^2 + y^2 = R^2 = 9$

Mit $x = r\cos(\phi)$ folgt

$$u(R,\phi) = u(3,\phi) = 1 - (3\cos(\phi))^2 = 1 - 9\cos^2(\phi) =: u_0(\phi)$$

$$u(R,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{R}\right)^k \left(A_k \cos(k\phi) \ + \ B_k \sin(k\phi)\right) \stackrel{!}{=} u_0(\phi)$$

Das ist gerade die Fourierreihe von $u_0(\phi)$. Im allgemeinen Fall:

$$u_0(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)$$

berechne: $$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \cos(k\phi)\, d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \sin(k\phi)\, d\phi$$

und erhalte die Lösung

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

In unserem Beispiel:

$$u(3, \phi) = 1 - 9\cos^2(\phi) = 1 - 9 \cdot \left(\tfrac{1+\cos(2\phi)}{2}\right) = u_0(\phi)$$

Andererseits nach unserer Lösungsformel:

$$u(3,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)\right)$$

Im allgemeinen Fall müssten wir jetzt berechnen:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 9\cos^2(\phi)) \cos(k\phi)\, d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 9\cos^2(\phi)) \sin(k\phi)\, d\phi$$

Alternativ: Nutze $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$

$u(3,\phi) = u_0(\phi) = 1 - 9\cos^2(\phi) = 1 - 9 \cdot \left(\frac{1+\cos(2\phi)}{2}\right).$

$$u(3,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)\right) \stackrel{!}{=} -\frac{7}{2} - \frac{9}{2}\cos(2\phi)$$

Koeffizientenvergleich liefert die Fourierkoeffizienten von u_0

$\frac{A_0}{2} = -\frac{7}{2}, \quad A_2 = -\frac{9}{2}, \quad A_K = B_k = 0$ sonst.

Wir hatten:

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(r,\phi) = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} \left(\frac{3}{r}\right)^2 \cos(2\phi)\,.$$

Lösung in kartesischen Koordinaten :

Wir haben $u(r,\phi) = -\frac{7}{2} - \frac{9}{2} \left(\frac{3}{r}\right)^2 \cos(2\phi)\,.$

$x = r\cos(\phi),\ y = r\sin(\phi).$

Nutze $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}$

$$u(x,y) = -\frac{7}{2} - \frac{81}{2(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,.$$