Hörsaalübung zu Blatt 4 Differentialgleichungen II
Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Einführung, Transformation auf Diagonalform, Harmonische Funktionen

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Hier nur zwei Variablen. Allgemeiner Fall: Vorlesung.

$$\boxed{a(x,t)u_{xx} + 2b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{tt} = h(x,t,u,u_x,u_t)}$$

unabhängig von u

Typen:

$$D(x,t) = a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 < 0 \;:\; \text{hyperbolisch},$$
$$D(x,t) = a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 = 0 \;:\; \text{parabolisch},$$
$$D(x,t) = a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 > 0 \;:\; \text{elliptisch}.$$

Unterschiedliche Verfahren sind geeignet, unterschiedliche Vorgabe von Anfangs- bzw. Randdaten für "vernünftige"* Aufgabenstellung erforderlich.

*) Vernünftig heißt sachgemäß/korrekt gestellt/ wohlgestellt: Es gibt eindeutige, stetig von den vorgegebenen Daten abhängige Lösung.

Beispiele:

Bestimmen Sie die Typen folgender Differentialgleichungen:

a) $\underbrace{\overset{a}{1}\,u_{xx} + \overset{2b}{6}\,u_{xy} + \overset{c}{9}\,u_{yy}}_{\text{Hauptteil}} + y\,u_x - x\,u_y = 0$

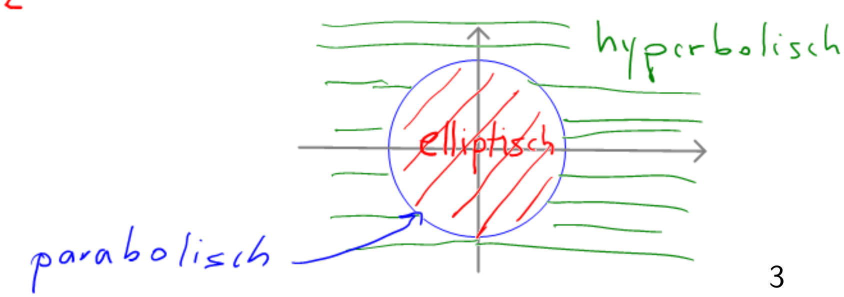
$ac - b^2 = 1\cdot 9 - 3^2 = 0 \longrightarrow$ Dgl ist parabolisch $\forall x, y$

b) $\overset{a}{(2x^2-1)}\,u_{xx}\;\overset{2b}{\underbrace{-\,4xy}}\,u_{xy} + \overset{c}{(2y^2-1)}\,u_{yy} + x\,u_x = \cos(x)$

$$a\cdot b - b^2 = (2x^2-1)(2y^2-1) - (-2xy)^2 = 4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 - 4x^2y^2$$

$$= 1 - 2x^2 - 2y^2 = 1 - 2(x^2+y^2)$$

$$ac - b^2 \begin{cases} < 0 & \text{falls } x^2+y^2 > 1/2 \quad \text{Dgl hyperbolisch} \\ = 0 & \text{falls } x^2+y^2 = 1/2 \quad \text{Dgl parabolisch} \\ > 0 & \text{falls } x^2+y^2 < 1/2 \quad \text{Dgl elliptisch} \end{cases}$$



Lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(der Ableitungen zweiter Ordnung)

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Diagonalformen: Keine gemischten Ableitungen zweiter Ordnung $a_{12} = 0$

Normalformen: Keine gemischten Ableitungen zweiter Ordnung und Koeffizienten der zweiten Ableitungen $\in \{-1, 0, 1\}$

$\underbrace{4(x-1)^2 + 20(x-1) + 24 = 0}_{\text{p-q Formel nicht direkt anwendbar}}$

hyperbolisch: $1u_{xx} - 1u_{tt} = G(x,t,u,u_x,u_t)$

parabolisch: $u_{xx} = G(x,t,u,u_x,u_t)$ $\quad 4y^2 + 20y + 24 = 0 \quad y = x-1$

elliptisch: $1u_{xx} + 1u_{tt} = G(x,t,u,u_x,u_t)$ $\quad y^2 + 5y + 6 = 0$ pq-Formel anwendbar

Ziel: Herstellung der Diagonalform/Normalform/integrierbare Form durch Einführung neuer Variablen

$\eta = \eta(x,t)$, $\tau = \tau(x,t)$,

sowie der neuen Funktion: $\boxed{v(\eta(x,t), \tau(x,t)) = u(x,t)}$

Regularitätsbedingung: $\eta_x\tau_t - \eta_t\tau_x \neq 0.$

Differentialausdrücke werden mittels Kettenregel umgerechnet:

$$u_x = (v(\eta(x,t),\tau(x,t)))_x = \boxed{v_\eta \cdot \eta_x + v_\tau \cdot \tau_x}$$

analog

$$u_t = v_\eta \cdot \eta_t + v_\tau \cdot \tau_t\,,$$

$$u_{xx} = \left(v_\eta(\eta,\tau)\cdot\eta_x + v_\tau(\eta,t)\cdot\tau_x\right)_x = (v_{\eta\eta}\cdot\eta_x + v_{\eta\tau}\cdot\tau_x)\cdot\eta_x + v_\eta\cdot\eta_{xx} + (v_{\tau\eta}\cdot\eta_x + v_{\tau\tau}\cdot\tau_x)\,\tau_x + v_\tau\cdot\tau_{xx}$$

$$= v_{\eta\eta}\cdot(\eta_x)^2 + 2v_{\eta\tau}\cdot\eta_x\tau_x + v_{\tau\tau}\cdot(\tau_x)^2 + (v_\eta\eta_{xx} + v_\tau\tau_{xx})\,,$$

$$u_{xt} = v_{\eta\eta}\cdot\eta_x\eta_t + v_{\eta\tau}\cdot(\tau_t\eta_x + \tau_x\eta_t) + v_{\tau\tau}\cdot\tau_t\tau_x + (v_\eta\eta_{xt} + v_\tau\tau_{xt})\,,$$

$$u_{tt} = v_{\eta\eta}\cdot(\eta_t)^2 + 2v_{\eta\tau}\cdot\eta_t\tau_t + v_{\tau\tau}\cdot(\tau_t)^2 + (v_\eta\eta_{tt} + v_\tau\tau_{tt})\,.$$

Dgl

$a_{11}u_{xx}$

$+$

$2a_{12}u_{xt}$

$+$

$a_{22}\cdot u_{tt}$

Dgl: $\underbrace{(a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\cdot\eta_x\eta_t + a_{22}\eta_t^2)}_{A}v_{\eta\eta} + \ldots$

Einsetzen liefert neue DGL

$$Av_{\eta\eta} + 2Bv_{\eta\tau} + Cv_{\tau\tau} = \tilde{h}(\eta,\tau,v,v_\eta,v_\tau)$$

Frage: Wie sollte man η,τ wählen?

Beispiel zur Hausaufgabe 2: Transformation auf integrierbare Form

Bei $u_{tt} + (a+b)u_{tx} + abu_{xx}$
Substituiere $\boxed{\alpha = x - bt,\ \mu = x - at.}$

Beispiel:

also $a = 2$, $b = 7$

$2 \cdot 7$ $\quad$ $2 + 7$

$$
\begin{aligned}
14u_{xx} + 9u_{xt} + u_{tt} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+ \\
u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\
u_t(x,0) &= v_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

gegebene Anfangswerte

$\alpha := x - 7t,\ \mu := x - 2t$

$u(x,t) = v(\alpha(x,t), \mu(x,t))$ $= v(x - 7t,\ x - 2t)$

Formeln von Seite 5 mit α, μ statt η und τ

$\alpha_x = 1$ $\alpha_t = -7$ $\mu_x = 1$ $\mu_t = -2$ $\alpha_{xx} = \mu_{xx} = \alpha_{tt} = \mu_{tt} = 0$
$\alpha_{xt} = \mu_{xt} = 0$

$$u_x = (v(\alpha(x,t), \mu(x,t)))_x = v_\alpha \cdot \alpha_x + v_\mu \cdot \mu_x = \underline{1\, v_\alpha + 1\, v_\mu}$$ vgl. Seite 5

$$u_t = v_\alpha \cdot \alpha_t + v_\mu \cdot \mu_t = \underline{-7\, v_\alpha - 2\, v_\mu}$$

$$u_{xx} = v_{\alpha\alpha} \cdot (\alpha_x)^2 + 2 v_{\alpha\mu} \cdot \alpha_x \mu_x + v_{\mu\mu} \cdot (\mu_x)^2 + (v_\alpha \alpha_{xx} + v_\mu \mu_{xx}),$$

$$u_{xt} = v_{\alpha\alpha} \cdot \underset{-7}{\alpha_x \alpha_t} + v_{\alpha\mu} \cdot (\underset{-2}{\mu_t \alpha_x} + \underset{(-7)}{\mu_x \alpha_t}) + v_{\mu\mu} \cdot \underset{-2}{\mu_t \mu_x} + (v_\alpha \alpha_{xt} + v_\mu \mu_{xt}),$$

$$u_{tt} = v_{\alpha\alpha} \cdot \underset{49}{(\alpha_t)^2} + 2 v_{\alpha\mu} \cdot \underset{14}{\alpha_t \mu_t} + v_{\mu\mu} \cdot \underset{4}{(\mu_t)^2} + (v_\alpha \alpha_{tt} + v_\mu \mu_{tt}).$$

Einsetzen in DGL $14 u_{xx} + 9 u_{xt} + u_{tt} = 0$

$$14\,(v_{\alpha\alpha} + 2 v_{\alpha\mu} + 1\, v_{\mu\mu}) + 9\,(-7 v_{\alpha\alpha} - 9 v_{\alpha\mu} - 2 v_{\mu\mu})$$
$$+ 49\, v_{\alpha\alpha} + 28\, v_{\alpha\mu} + 4\, v_{\mu\mu}$$

$$= (\underbrace{14 - 63 + 49}_{0})\, v_{\alpha\alpha} + (\underbrace{28 - 81 + 28}_{-25})\, v_{\alpha\mu} + (\underbrace{14 - 18 + 4}_{0})\, v_{\mu\mu}$$

$$= -25\, v_{\alpha\mu} = 0$$ "integrierbare Form"

$$\boxed{v_{\alpha\mu} = 0}$$ Lösung s. unten

Alternativ: Bei linearen Transformationen und DGL

$$\boxed{\underbrace{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt}} + \underbrace{b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t} + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Matrixschreibweise:

$b_1 \partial/\partial x\, u + b_2 \partial/\partial t\, u = (b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial t})u = (b_1 \;\; b_2)\underbrace{\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial t\end{pmatrix}}_{\nabla} u$

$= \vec{b}^T \nabla u$

$$\underbrace{(\nabla^T \boldsymbol{A} \nabla)}u + (b^T\nabla)u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$$

Analog

$(\frac{\partial}{\partial x} \;\; \frac{\partial}{\partial t}) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial t\end{pmatrix} u = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt}$

Hier

DGL: $$(\nabla^T A \nabla)u = \nabla^T \begin{pmatrix} 14 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} \nabla \cdot u = \mathbf{0}$$

Transformation: $$\begin{pmatrix}\alpha \\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t\end{pmatrix} =: \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t\end{pmatrix}$$

definiere S^T so!

$\alpha = x - 7t$

$\mu = x - 2t$

Oben berechnet:

$$u_x = 1\cdot v_\alpha + 1\cdot v_\mu\,,$$
$$u_t = -7\cdot v_\alpha - 2\cdot v_\mu$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\mu \end{pmatrix}}$$

$$\nabla_{xt}\cdot\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}\begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\mu \end{pmatrix}} = \boldsymbol{S}\nabla_{\alpha\mu}\cdot v$$

Also

$$\boxed{\nabla_{xt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\alpha\mu} = \boldsymbol{S}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \end{pmatrix}}$$

Alte Dgl

$$(\nabla_{xt}^T A \nabla_{xt})\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\alpha\mu})^T\cdot A\cdot\boldsymbol{S}\cdot\nabla_{\alpha\mu}\,\boldsymbol{v} = \nabla_{\alpha\mu}^T\underbrace{(\boldsymbol{S}^T\cdot A\cdot\boldsymbol{S})}_{\text{Neue Matrix im Hauptteil der Dgl}}\nabla_{\alpha\mu}\,\boldsymbol{v} = 0$$

$S\nabla_{\alpha\mu}$

Für unser Beispiel gilt:

$$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{25}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Unsere neue DGL:

$$\nabla^T_{\alpha\mu}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\nabla_{\alpha\mu}\boldsymbol{v} = \left(\tfrac{\partial}{\partial\alpha}, \tfrac{\partial}{\partial\mu}\right) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{25}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial\mu} \end{pmatrix} \overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} -25\boldsymbol{v}_{\alpha\mu} = 0$$

Wie auf Seite 7

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{\alpha\mu} = 0} \Longrightarrow \left(v_\alpha(\alpha,\mu)\right)_\mu = 0$$

$$\boldsymbol{v}_\alpha = \varphi(\alpha) \overset{\int d\alpha}{\Longrightarrow} \phi(\alpha) + \kappa(\mu)$$

$$\boldsymbol{v} = \phi(\alpha) + \kappa(\mu) \Longrightarrow \boxed{u(x,t) = v(\alpha,\mu) = \phi(x-7t) + \varkappa(x-2t)} \quad (*)$$

Allgemeine Lösung

$$u_t = \phi'(x-7t)(-7) + \varkappa'(x-2t)(-2)$$

Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = u_0(x) = \phi(x) + \varkappa(x) \quad (1)$$

$$u_t(x,0) = v_0(x) = -7\phi'(x) - 2\varkappa'(x) \xrightarrow{\int dx}$$

$$\int v_0(x)\,dx = -7\phi(x) - 2\varkappa(x) \quad (2)$$

(1) und (2): Zwei Gleichungen für ϕ und $\varkappa$
→ auflösen → konkrete Fkt'n ϕ, $\varkappa$
→ in $*$ einsetzen → u

Transformation auf Normalform

für lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Matrixschreibweise: $(\nabla^T A \nabla)u + (b^T\nabla)u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

A ist reell und symmetrisch:

Bestimme EWe λ_1, λ_2 und zugehörige, orthonormierte Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}$.

$$(v^{[1]})^T v^{[1]} = (v^{[2]})^T v^{[2]} = 1$$

$$(v^{[1]})^T v^{[2]} = (v^{[2]})^T v^{[1]} = 0$$

Setze $\boldsymbol{S} := (\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]})$, $\qquad \boxed{\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} := \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}}$

Dann gilt wieder nach Kettenregel: $\nabla_{xt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\eta\tau} = \boldsymbol{S} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix}$

$$(\nabla_{xt}^T A \nabla_{xt})u = (\,\boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\eta\tau}\,)^T \cdot A \cdot \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\eta\tau}\, v$$

$$\left(\nabla_{\eta\tau}^T \underbrace{\left(S^T A S \right)} \nabla_{\eta\tau} \right) v$$

$$S^T A S = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{[1]})^T \\ (\boldsymbol{v}^{[2]})^T \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \, (\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{[1]})^T \\ (\boldsymbol{v}^{[2]})^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{[2]}) = \begin{pmatrix} v^{[1]T} \\ v^{[2]T} \end{pmatrix} (\lambda_1 v^{[1]}, \lambda_2 v^{[2]})$$

S

$(\lambda_1 v^{[1]}, \lambda_2 v^{[2]})$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \underbrace{(v^{[1]})^T v^{[1]}}_{1} & \lambda_2 \underbrace{v^{[1]T} v^{[2]}}_{0} \\ \lambda_1 \underbrace{(v^{[2]})^T v^{[1]}}_{0} & \lambda_2 \underbrace{v^{[2]T} v^{[2]}}_{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Der Koordinatenwechsel führt zur **Diagonalform**:

Hauptteil: $\left(\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} v = \lambda_1 v_{\eta\eta} + \lambda_2 v_{\tau\tau}$

$\nabla^T \qquad \nabla$

$$\lambda_1 v_{\eta\eta} + \lambda_2 v_{\tau\tau} + p_1 v_\eta + p_2 v_\tau + dv = H$$

Hyperbolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$,

Elliptisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$,

Parabolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Im hyperbolischen und elliptischen Fall führt die Skalierung :

$\hat{x} = \eta/\sqrt{\lambda_1}$, $\hat{t} = \tau/\sqrt{\lambda_2}$ auf die **Normalformen**

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} \pm \hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} + p_1\hat{u}_{\hat{x}} + p_2\hat{u}_{\hat{t}} + d\hat{u} = H$$

Im parabolischen Fall ist ein Eigenwert, z.B. λ_2, gleich Null. Eine der zweiten Ableitungen z.B. $\tilde{u}_{\tau\tau}$ fehlt. Man teilt die Diagonalform durch λ_1.

Beispiele Diagonalformen:

Hyperbolisch: Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$,

Elliptisch: Potential-/Laplacegleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, auch Normalform

Parabolisch: Wärmeleitungsgleichung $u_t - c u_{xx} = 0$.

p1

Beispiel: Bestimmen Sie den Typ und transformieren Sie auf Normalform

$$\underset{a_{11}}{\overset{a}{2}}u_{xx} + \underset{2a_{12}}{\overset{2b}{4}}u_{xy} + \underset{a_{22}}{\overset{d}{2}}u_{yy} + \underline{\sqrt{2}(u_x + u_y)} = 0$$

Typ: $a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2 = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0$ parabolisch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow p(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ (parabolisch)

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 0$

$$(A - \overset{0}{\lambda_1} I)\boldsymbol{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} v^{[1]} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v^{[1]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda_2 = 4$

$$(A - \overset{4}{\lambda_2} I)\boldsymbol{v}^{[2]} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} v^{[2]} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v^{[2]} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{S} := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left(v^{[1]}, v^{[2]} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S^T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\eta = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \qquad \tau = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

Alte DGL: $\underbrace{2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy}}_{\lambda_1 v_{\eta\eta} + \lambda_2 v_{\tau\tau}} + \sqrt{2}(u_x + u_y) = 0$

Wir müssen noch $\sqrt{2}(u_x + u_y)$ ersetzen

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} v_\eta \\ v_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\eta \\ v_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} v_\eta + \frac{1}{\sqrt{2}} v_\tau \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} v_\eta + \frac{1}{\sqrt{2}} v_\tau \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2}(u_x + u_y) = \sqrt{2}\left(0 + \frac{2}{\sqrt{2}} v_\tau\right) = 2 v_\tau$$

Neue Dgl $\quad 0 \cdot v_{\eta\eta} + 4 v_{\tau\tau} + 2 v_\tau = 0$

zufällig keine Ableitung nach η also neue Dgl zufällig ODE

Alternativ: Wieder mit Formeln aus Seite 5:

$$u_x = (u(x,y))_x = (v(\eta(x,y), \tau(x,y)))_x = v_\eta \cdot \eta_x + v_\tau \cdot \tau_x$$

$$\eta = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \qquad \tau = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$\eta_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tau_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad u_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \eta_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \tau_x$$

$$u_y = (u(x,y))_y = (v(\eta(x,y), \tau(x,y)))_y = v_\eta \cdot \eta_y + v_\tau \cdot \tau_y$$

$$\eta_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tau_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad u_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} v_\eta + \frac{1}{\sqrt{2}} v_\tau$$

Alte DGL: $\underbrace{2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy}} + \sqrt{2}(u_x + u_y) = 0$

Neue DGL: $\underbrace{4v_{\tau\tau} + 2v_\tau = 0}$

hat **Diagonalform**:

Normalform: $v_{\tau\tau} + \frac{1}{2}v_\tau = 0$

Lösung der ODE:

Definiere: $z(\eta,\tau) = v_\tau(\eta,\tau)$. Dann folgt

$$z_\tau = -\frac{1}{2}z \iff \frac{dz}{d\tau} = -\frac{z}{2} \iff \int\frac{dz}{z} = -\int\frac{d\tau}{2}$$

$$\iff \ln|z| = -\frac{\tau}{2} + \tilde{k}(\eta) \xrightarrow{exp} |z| = e^{-\frac{\tau}{2}+\tilde{k}(\eta)} = \underbrace{e^{\tilde{k}(\eta)}}_{k(\eta)} \cdot e^{-\frac{\tau}{2}}$$

$$z = K(\eta)\cdot e^{-\dfrac{\tau}{2}} = v_\tau$$

Integration nach τ ergibt (mit $f(\eta) = -2K(\eta)$)

$$\boxed{v(\eta,\tau) = \underbrace{-2K(\eta)}_{f(\eta)} e^{-\frac{\tau}{2}} + \underbrace{c(\eta)}_{= g}}$$

$u(x,t) = v(\eta, \tau) = f(\eta) e^{-\frac{\tau}{2}} + g(\eta)$

oder nach Rücksubstitution $\eta = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ $\tau = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$$u(x,y) = f\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{x+y}{2\sqrt{2}}} + g\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right).$$

Alternative Lösung: der ODE

$$4v_{\tau\tau} + 2v_\tau = 0 \iff v_{\tau\tau} + \tfrac{1}{2}v_\tau = 0$$

Charakteristisches Polynom:

$$\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}$$

Allgemeine Lösung: $c_1 e^{0\cdot\tau} + c_2 e^{-\frac{1}{2}\tau}$ c_1, c_2 konstant bzgl τ

$$v(\eta,\tau) = c_1(\eta) + c_2(\eta) e^{-\frac{\tau}{2}}$$

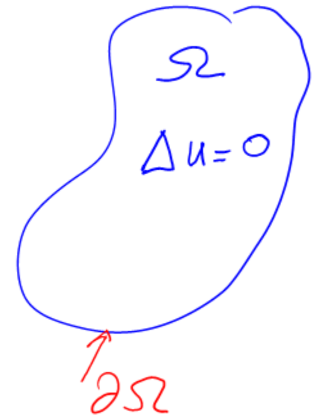
$\downarrow$ Rücksubstitution

$$u(x, y) = c_1\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + c_2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{x+y}{2\sqrt{2}}}.$$

Laplace Gleichung, harmonische Funktionen

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \partial\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \forall\,(x, y) \in \Omega}$$



Eigenschaften harmonischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft:

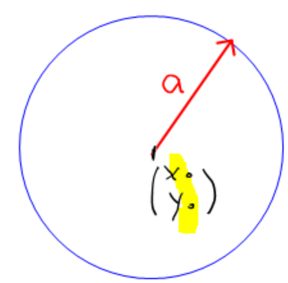
Sei u harmonisch in der offenen Kreisscheibe $B_a(x_0, y_0)$ mit Radius a um (x_0, y_0) und stetig auf dem Rand des Kreises $\partial B_a(x_0, y_0)$ fortsetzbar. Dann gilt

$$\boxed{u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial B_a(x_0,y_0)} u(x,y)ds}$$

Länge des Weges = Kreisumfang

Σ Werte von u auf dem Rand der Kreisscheibe

Mittelwert von u auf dem Rand der Kreisscheibe



Maximumprinzip:

von u auf der Kreisscheibe

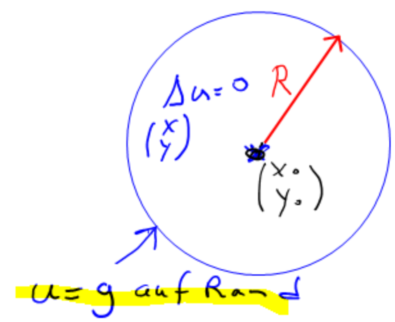
Eine in Ω (wie oben) harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

Sind die Werte $u(x, y) = g(x, y)$ auf $= \partial\Omega$ vorgegeben, so ist u **eindeutig**.

Poissonsche Integralformel: Für die Lösung von

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$$

$$u_{xx} + u_{yy} = g(x, y) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

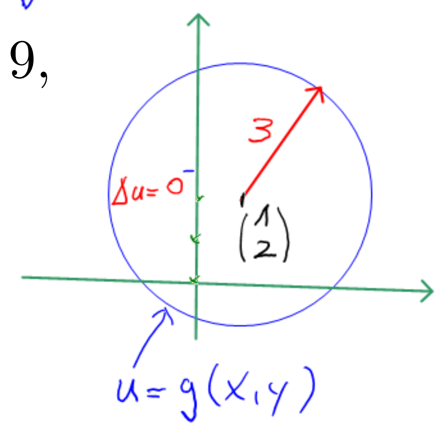


$$u(x, y) = \frac{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{2\pi R} \int_{\underbrace{\|z - \binom{x_0}{y_0}\| = R}_{\text{Rand der Kreisscheibe}}} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z} - \binom{x}{y}\|^2} \, d\boldsymbol{z}$$

Beispiel:(vgl. P2)

Gesucht ist der Wert $u(1,2)^T$ der C^2 Funktion mit

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{für} \quad (x - \overset{x_0}{1})^2 + (y - \overset{y_0}{2})^2 < \overset{r=3}{9},$$



mit

A) $u(x,y) = 2023 = g$ für $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$

Variante 1) Die Lösung ist eindeutig.

$u(x,y) = 2023$ löst die Potentialgleichung in der ganzen Kreisscheibe,

Also $u(1,2) = 2023$

Also wenn $u(x,y) = 2023$ $\forall x,y$ nicht nur auf dem Rand

Dann $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $\forall \binom{x}{y}$

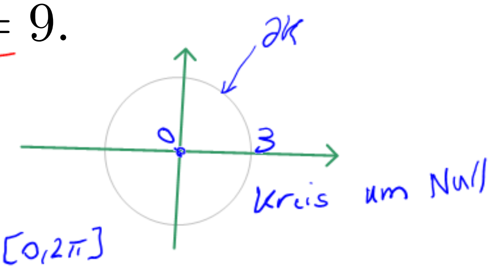
Variante 2) $u(x,y)$ ist konstant auf dem Rand von Ω.

Maximum und Minimum von u in $\bar{\Omega}$ werden auf dem Rand angenommen.

$$\underbrace{\text{Max} = 2023 \qquad \text{Min} = 2023}_{\text{Also } u \text{ konstant gleich } 2023}$$

Also $u(1,2) = 2023$

B) $u(x,y) = \underbrace{x^2 - y^2 + 2023}_{g(x,y)}$ für $\underbrace{(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9}_{\text{Kreis um } \binom{1}{2} \text{ mit Radius } 3}$.



Hinweis: $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.

Rand: $\underbrace{\partial K = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]}_{\text{Kreis um Null}}$

Variante 1):

Mittelpunkt verschieben in $\binom{1}{2}$ $\begin{pmatrix} 1 + 3\cos(t) \\ 2 + 3\sin(t) \end{pmatrix} = c(t)$

K sei die Kreisscheibe mit Radius $r = 3$ um $(1,2)^T$ (Vorlesung $B_3(1,2)$)

und $\mathbf{c}(t) = (1 + 3\cos(t), 2 + 3\sin(t))^T$ (Vorlesung $\partial B_r(1,2)$)

$t \in [0, 2\pi]$

eine Parametrisierung von ∂K.

Dann gilt nach der Mittelwerteigenschaft

$$u(1,2) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial K} u(x,y)\, d(x,y) = \frac{1}{2\pi \cdot r} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt$$

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} \qquad \|\dot{c}(t)\|^2 = 9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) = 9\underbrace{(\sin^2(t) + \cos^2(t))}_{1} = 9$$

$$u(1,2) = \underbrace{\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial K} u(x,y)\,d(x,y)}_{3} = \frac{1}{2\pi\cdot 3}\int_{\partial K} (\underline{\overset{c_1(t)}{x^2} - \overset{c_2(t)}{y^2} + 2023})\,d(x,y)$$

$$= \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi} u(\mathbf{c}(t))\cdot\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt$$

$$= \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\overbrace{(1+3\cos(t))^2}^{x^2} - \overbrace{(2+3\sin(t))^2}^{y^2} + 2023\Big)\cdot \overset{\|\dot{c}(t)\|}{3}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\overbrace{1+6\cos(t)+9\cos^2(t)}\,\overbrace{-\,4-12\sin(t)-9\sin^2(t)}+2023\Big)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\Big[9\big(\underbrace{\cos^2(t)-\sin^2(t)}\big)-3+2023\Big]\,dt\right] + \frac{6}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(t)\,dt}_{0} - \frac{12}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(t)\,dt}_{0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(9\underbrace{\cos(2t)} - 3 + 2023\big)\,dt \quad = \underbrace{\frac{9}{2\pi}\,\frac{\sin(2t)}{2}\Big|_0^{2\pi}}_{0} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2020\,dt$$

$$= 2020$$

Variante 2): Poissonsche Integralformel

$$u(x,y) = \frac{R^2 - (\overset{x_0}{x} - 1)^2 - (\overset{y_0}{y} - 2)^2}{2\pi R} \int_{\|z - \binom{1}{2}\| = R} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\underbrace{\|\boldsymbol{z} - \binom{x}{y}\|^2}} \, d\boldsymbol{z}$$

$\binom{1}{2} = \binom{x_0}{y_0}$

$R = 3$

$$u(1,2) = \frac{3^2 - 0^2 - 0^2}{2\pi 3} \int_{\|z - \binom{1}{2}\| = 3} \frac{z_1^2 - z_2^2 + 2023}{\underbrace{\|\boldsymbol{z} - \binom{1}{2}\|^2}} \, d\boldsymbol{z}$$

$g(x,y) = x^2 - y^2 + 2023$

$g(z_1, z_2) = z_1^2 - z_2^2 + 2023$

$$= \frac{9}{6\pi} \int_0^{2\pi} \frac{((1 + 3\cos(t))^2 - (2 + 3\sin(t))^2 + 2023)}{\underbrace{3^2}} \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

$$= \frac{3}{6\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 6\cos(t) + 9\cos^2(t) - 4 - 12\sin(t) - 9\sin^2(t) + 2023) \, dt$$

$$= 2020\,.$$

Variante 3)

Da die Lösung unseres Problems eindeutig ist, haben wir wegen

$$(x^2 - y^2 + 2023)_{xx} + (x^2 - y^2 + 2023)_{yy} = 2 - 2 = 0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

die Lösung bereits vorliegen und es gilt:

$$u(1,2) = 1^2 - 2^2 + 2023 = 2020\,.$$