Hörsaalübung zu Blatt 4 Differentialgleichungen II
Differentialgleichungen zweiter Ordnung: Einführung, Transformation auf Diagonalform, Harmonische Funktionen

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Hier nur zwei Variablen. Allgemeiner Fall: Vorlesung.

$$\boxed{a(x,t)u_{xx} + 2b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{tt} \;=\; h(x,t,u,u_x,u_t)}$$

Typen:

$D(x,t) = \; a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 < 0$: hyperbolisch,
$D(x,t) = \; a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 = 0$: parabolisch,
$D(x,t) = \; a(x,t)c(x,t) - (b(x,t))^2 > 0$: elliptisch.

Unterschiedliche Verfahren sind geeignet, unterschiedliche Vorgabe von Anfangs- bzw. Randdaten für vernünftige * Aufgabenstellung erforderlich.

*) Vernünftig heißt sachgemäß/korrekt gestellt/ wohlgestellt: Es gibt eindeutige, stetig von den vorgegebenen Daten abhängige Lösung.

Beispiele:

Bestimmen Sie die Typen folgender Differentialgleichungen:

a) $u_{xx} + 6\,u_{xy} + 9\,u_{yy} + \; y\,u_x - x\,u_y \;=\; 0$

b) $(2x^2 - 1)\,u_{xx} - 4xy\,u_{xy} + (2y^2 - 1)\,u_{yy} + x\,u_x \;=\; \cos(x)$

Lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(der Ableitungen zweiter Ordnung)

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Diagonalformen: Keine gemischten Ableitungen zweiter Ordnung

Normalformen: Keine gemischten Ableitungen zweiter Ordnung und Koeffizienten der zweiten Ableitungen $\in \{-1, 0, 1\}$

hyperbolisch: $u_{xx} - u_{tt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

parabolisch: $u_{xx} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

elliptisch: $u_{xx} + u_{tt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

Ziel: Herstellung der Diagonalform/Normalform/integrierbare Form durch Einführung neuer Variablen
$\eta = \eta(x,t)$, $\tau = \tau(x,t)$,

sowie der neuen Funktion: $v(\eta(x,t), \tau(x,t)) = u(x,t)$

Regularitätsbedingung: $\eta_x \tau_t - \eta_t \tau_x \neq 0.$

Differentialausdrücke werden mittels Kettenregel umgerechnet:

$$u_x = \left(v(\eta(x,t), \tau(x,t))\right)_x =$$

$$\begin{aligned}
u_t &= v_\eta \cdot \eta_t + v_\tau \cdot \tau_t \,, \\
u_{xx} &= \\
&= v_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + 2v_{\eta\tau} \cdot \eta_x \tau_x + v_{\tau\tau} \cdot (\tau_x)^2 \;+\; (v_\eta \eta_{xx} + v_\tau \tau_{xx}) \,, \\
u_{xt} &= v_{\eta\eta} \cdot \eta_x \eta_t + v_{\eta\tau} \cdot (\tau_t \eta_x + \tau_x \eta_t) + v_{\tau\tau} \cdot \tau_t \tau_x \;+ (v_\eta \eta_{xt} + v_\tau \tau_{xt}) \,, \\
u_{tt} &= v_{\eta\eta} \cdot (\eta_t)^2 + 2v_{\eta\tau} \cdot \eta_t \tau_t + v_{\tau\tau} \cdot (\tau_t)^2 + (v_\eta \eta_{tt} + v_\tau \tau_{tt}) \,.
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert neue DGL

$$A v_{\eta\eta} + 2B v_{\eta\tau} + C v_{\tau\tau} \;=\; \tilde{h}(\eta, \tau, v, v_\eta, v_\tau)$$

Frage: Wie sollte man η, τ wählen?

Beispiel zur Hausaufgabe 2: Transformation auf integrierbare Form

Bei $\qquad u_{tt} + (a+b)u_{tx} + abu_{xx}$
Substituiere $\alpha = x - bt$, $\mu = x - at$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 14u_{xx} + 9u_{xt} + u_{tt} = \; & 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = v_0(x). & \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\alpha \;=\; x - 7t,\; \mu \;=\; x - 2t$$

$$u(x,t) = v(\alpha(x,t), \mu(x,t))$$

Formeln von Seite 5 mit α, μ statt η und τ

$$u_x = \left(v(\alpha(x,t),\mu(x,t))\right)_x =$$

$$\begin{aligned}
u_t &= v_\alpha \cdot \alpha_t + v_\mu \cdot \mu_t \\
u_{xx} &= v_{\alpha\alpha} \cdot (\alpha_x)^2 + 2v_{\alpha\mu} \cdot \alpha_x\mu_x + v_{\mu\mu} \cdot (\mu_x)^2 \; + \; (v_\alpha\alpha_{xx} + v_\mu\mu_{xx})\,, \\
u_{xt} &= v_{\alpha\alpha} \cdot \alpha_x\alpha_t + v_{\alpha\mu} \cdot (\mu_t\alpha_x + \mu_x\alpha_t) + v_{\mu\mu} \cdot \mu_t\mu_x \; + (v_\alpha\alpha_{xt} + v_\mu\mu_{xt})\,, \\
u_{tt} &= v_{\alpha\alpha} \cdot (\alpha_t)^2 + 2v_{\alpha\mu} \cdot \alpha_t\mu_t + v_{\mu\mu} \cdot (\mu_t)^2 + (v_\alpha\alpha_{tt} + v_\mu\mu_{tt})\,.
\end{aligned}$$

Einsetzen in DGL $14u_{xx} + 9u_{xt} + u_{tt} = \; 0$

Alternativ: Bei linearen Transformationen und DGL

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Matrixschreibweise:

$$(\nabla^T \boldsymbol{A} \nabla)u + (b^T\nabla)u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Hier

DGL: $\quad (\nabla^T A \nabla)u = \nabla^T \begin{pmatrix} 14 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} \nabla \cdot u = \mathbf{0}$

Transformation: $\quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} =: \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

Oben berechnet:

$$u_x = \ 1 \cdot v_\alpha + 1 \cdot v_\mu \,, \qquad u_t = -7 \cdot v_\alpha - 2 \cdot v_\mu$$

$$\nabla_{xt} \cdot \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\mu \end{pmatrix} = \ \boldsymbol{S} \nabla_{\alpha\mu} \cdot v$$

Also $\qquad \nabla_{xt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\alpha\mu} = \boldsymbol{S} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \end{pmatrix}$

$$(\nabla_{xt}^T A \nabla_{xt}) \boldsymbol{u} = \ (\ \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\alpha\mu}\ )^T \cdot A \cdot \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\alpha\mu}\, \boldsymbol{v} = \ \nabla_{\alpha\mu}^T \,(\boldsymbol{S}^T \cdot A \cdot \boldsymbol{S})\, \nabla_{\alpha\mu}\, \boldsymbol{v} \ = \ 0$$

Für unser Beispiel gilt:

$$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{25}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Unsere neue DGL:

$$\nabla_{\alpha\mu}^T\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\nabla_{\alpha\mu}\,\boldsymbol{v} = (\tfrac{\partial}{\partial\alpha}, \tfrac{\partial}{\partial\mu}) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{25}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial\mu} \end{pmatrix} = -25\boldsymbol{v}_{\alpha\mu} = 0$$

$\boldsymbol{v}_{\alpha\mu} = 0 \implies$

$\boldsymbol{v}_{\alpha} = \qquad\qquad \implies$

$\boldsymbol{v} = \qquad\qquad \implies$

Anfangsbedingungen:

$u(x,0) = u_0(x)$

$u_t(x,0) = v_0(x)$

Transformation auf Normalform

für lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + c(x,t)u = h(x,t)}$$

Matrixschreibweise: $\quad (\nabla^T A \nabla)u + (b^T \nabla)u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

A ist reell und symmetrisch:

Bestimme EWe λ_1, λ_2 und zugehörige, orthonormierte Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}$.

Setze $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]})$, $\qquad \begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

Dann gilt wieder nach Kettenregel: $\nabla_{xt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\eta\tau} = \boldsymbol{S} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix}$

$$(\nabla_{xt}^T A \nabla_{xt})u = (\ \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\eta\tau}\ )^T \cdot A \cdot \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\eta\tau}\, v$$

$$S^T A S = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{[1]})^T \\ (\boldsymbol{v}^{[2]})^T \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \, (\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{[1]})^T \\ (\boldsymbol{v}^{[2]})^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{[2]}) =$$

Der Koordinatenwechsel führt zur **Diagonalform**:

Hauptteil: $(\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \tau}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} v$

$$\lambda_1 v_{\eta\eta} + \lambda_2 v_{\tau\tau} + p_1 v_\eta + p_2 v_\tau + dv = H$$

Hyperbolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \, < \, 0$,

Elliptisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \, > \, 0$,

Parabolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \, = \, 0$.

Im hyperbolischen und elliptischen Fall führt die Skalierung :

$\hat{x} = \eta/\sqrt{\lambda_1}$, $\hat{t} = \tau/\sqrt{\lambda_2}$ auf die **Normalformen**

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} \pm \hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} + p_1 \hat{u}_{\hat{x}} + p_2 \hat{u}_{\hat{t}} + d\hat{u} = H$$

Im parabolischen Fall ist ein Eigenwert, z.B. λ_2, gleich Null. Eine der zweiten Ableitungen z.B. $\tilde{u}_{\tau\tau}$ fehlt. Man teilt die Diagonalform durch λ_1.

Beispiele Diagonalformen:

Hyperbolisch: Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$,

Elliptisch: Potential-/Laplacegleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$,

Parabolisch: Wärmeleitungsgleichung $u_t - c u_{xx} = 0$.

Beispiel: Bestimmen Sie den Typ und transformieren Sie auf Normalform

$$2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + \sqrt{2}(u_x + u_y) \;=\; 0$$

Typ: $a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2 =$

$A =$

$\Longrightarrow \; p(\lambda) =$

$\Longrightarrow \lambda_1 =$ $\qquad\qquad$ $, \; \lambda_2 =$ $\qquad\qquad$ (...........isch)

Eigenvektoren:

$(A - \lambda_1 I)\boldsymbol{v}^{[1]} =$

$$(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{v}^{[2]} =$$

$$\boldsymbol{S} =$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\eta =$ $\qquad\qquad$ $\tau =$

Alte DGL: $2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + \sqrt{2}(u_x + u_y) \;=\; 0$

Wir müssen noch $\sqrt{2}(u_x + u_y)$ ersetzen

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} v_\eta \\ v_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\eta \\ v_\tau \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2}(u_x + u_y) \ =$$

Alternativ: Wieder mit Formeln aus Seite 5:

$$u_x = (u(x,y))_x = (v(\eta(x,y), \tau(x,y))_x = v_\eta \cdot \eta_x + v_\tau \cdot \tau_x$$

$\eta = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ $\qquad\qquad$ $\tau = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$\eta_x =$ $\qquad\qquad$ $\tau_x =$ $\qquad\qquad$ $u_x =$

$$u_y = (u(x,y))_y = (v(\eta(x,y), \tau(x,y))_y = v_\eta \cdot \eta_y + v_\tau \cdot \tau_y$$

$\eta_y =$ $\qquad\qquad$ $\tau_y =$ $\qquad\qquad$ $u_y =$

Alte DGL: $2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + \sqrt{2}(u_x + u_y) \; = \; 0$

Neue DGL:

hat **Diagonalform**:

Normalform:

Lösung der ODE:

Definiere: $z(\eta, \tau) = v_\tau(\eta, \tau)$. Dann folgt

$$z_\tau \; = \; -\frac{1}{2}z \iff \frac{dz}{d\tau} \; = \; -\frac{z}{2} \iff \frac{dz}{z} \; = \; -\frac{d\tau}{2}$$

$$\iff \ln|z| \; = \; -\frac{\tau}{2} + \ldots\ldots\ldots$$

$$z \; = \; K(\eta) \cdot e^{-\dfrac{\tau}{2}}$$

Integration nach τ ergibt (mit $f(\eta) = -2K(\eta)$)

$$v(\eta,\tau) = -2K(\eta)e^{-\dfrac{\tau}{2}} + c(\qquad)$$

oder

$$u(x,y) = f\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{x+y}{2\sqrt{2}}} + g\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right).$$

Alternative Lösung:

$$4v_{\tau\tau} + 2v_\tau = 0 \iff v_{\tau\tau} + \tfrac{1}{2}v_\tau = 0$$

Charakteristisches Polynom:

$$\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}$$

Allgemeine Lösung:

$$v(\eta,\tau) = c_1(\eta) + c_2(\eta)e^{-\dfrac{\tau}{2}}$$

$$u(x,y) = c_1\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + c_2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{x+y}{2\sqrt{2}}}.$$

Laplace Gleichung, harmonische Funktionen

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \partial\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \forall\, (x, y) \in \Omega}$$

Eigenschaften harmonischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft:

Sei u harmonisch in der offenen Kreisscheibe $B_a(x_0, y_0)$ mit Radius a um (x_0, y_0) und stetig auf dem Rand des Kreises $\partial B_a(x_0, y_0)$ fortsetzbar. Dann gilt

$$\boxed{u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial B_a(x_0, y_0)} u(x, y)\, ds}$$

Maximumprinzip:

Eine in Ω (wie oben) harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

Sind die Werte $u(x,y) = g(x,y)$ auf $= \partial\Omega$ vorgegeben, so ist u **eindeutig**.

Poissonsche Integralformel: Für die Lösung von

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < R^2$$

$$u_{xx} + u_{yy} = g(x,y) \qquad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$u(x,y) = \frac{R^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{2\pi R} \int_{\|z - \binom{x_0}{y_0}\| = R} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z} - \binom{x}{y}\|^2}\, d\boldsymbol{z}$$

Beispiel:(vgl. P2)

Gesucht ist der Wert $u(1,2)^T$ der C^2 Funktion mit

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 < 9,$$

mit

A) $u(x,y) = 2023 \qquad$ für $\quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$

Variante 1) Die Lösung ist eindeutig.

$u(x,y) = 2023$ löst die Potentialgleichung in der ganzen Kreisscheibe,

Also $u(1,2) =$

Variante 2) $u(x,y)$ ist konstant auf dem Rand von Ω.

Maximum und Minimum von u in $\bar{\Omega}$ werden auf dem Rand angenommen.

Also $u(1,2) =$

B) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2023$ für $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$

Hinweis: $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t).$

Variante 1):

K sei die Kreisscheibe mit Radius $r = 3$ um $(1,2)^T$ (Vorlesung $B_3(1,2)$)

und $\mathbf{c}(t) = (1 + 3\cos(t),\ 2 + 3\sin(t))^T$ (Vorlesung $\partial B_r(1,2)$)

eine Parametrisierung von ∂K.

Dann gilt nach der Mittelwerteigenschaft

$$u(1,2) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial K} u(x,y)\, d(x,y) = \frac{1}{2\pi \cdot r} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt$$

$$
\begin{aligned}
u(1,2) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial K} u(x,y)\, d(x,y) = \frac{1}{2\pi \cdot 3} \int_{\partial K} (x^2 - y^2 + 2023)\, d(x,y) \\
&= \frac{1}{6\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt \\
&= \frac{1}{6\pi} \int_0^{2\pi} \left((1+3\cos(t))^2 - (2+3\sin(t))^2 + 2023\right) \cdot 3\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 6\cos(t) + 9\cos^2(t) - 4 - 12\sin(t) - 9\sin^2(t) + 2023)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (9\cos(2t) - 3 + 2023)\, dt \\
&= 2020
\end{aligned}
$$

Variante 2): Poissonsche Integralformel

$$u(x,y) = \frac{R^2 - (x-1)^2 - (y-2)^2}{2\pi R} \int_{\|z - \binom{1}{2}\| = R} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z} - \binom{x}{y}\|^2} \, d\boldsymbol{z}$$

$$\begin{aligned} u(1,2) &= \frac{3^2 - 0^2 - 0^2}{2\pi 3} \int_{\|z - \binom{1}{2}\| = 3} \frac{z_1^2 - z_2^2 + 2023}{\|\boldsymbol{z} - \binom{1}{2}\|^2} \, d\boldsymbol{z} \\ &= \frac{9}{6\pi} \int_0^{2\pi} \frac{((1 + 3\cos(t))^2 - (2 + 3\sin(t))^2 + 2023)}{3^2} \cdot \ \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \ dt \\ &= \frac{3}{6\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 6\cos(t) + 9\cos^2(t) - 4 - 12\sin(t) - 9\sin^2(t) + 2023) \, dt \\ &= 2020\,. \end{aligned}$$

Variante 3)

Da die Lösung unseres Problems eindeutig ist, haben wir wegen

$$(x^2 - y^2 + 2023)_{xx} + (x^2 - y^2 + 2023)_{yy} = 2 - 2 = 0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

die Lösung bereits vorliegen und es gilt:

$$u(1,2) = 1^2 - 2^2 + 2023 = 2020\,.$$