Hörsaalübung zu Blatt 3 Differentialgleichungen II Erhaltungsgleichugen; Stoß- und Verdünnungswellen, Burgers Gleichung

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Zur Erinnerung: Im Hausaufgabenblatt 2 hatten wir mit

$u(x,t) =$ Dichte im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t) =$ Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t) = u(x,t) \cdot v(x,t) =$ Fluss in (x,t)

die Massebilanz

$$\int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\,dx = M_0 + \int_{t_0}^{t} (q(a,\tau) - q(a+\Delta a,\tau))\,d\tau\,.$$

Hier müssen u bzw. q nicht differenzierbar sein. Es genügt z.B. stückweise stetig

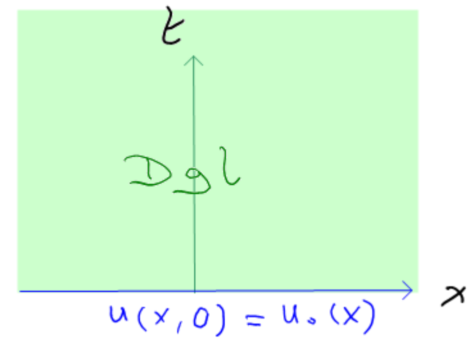
Erst nach Umformungen und unter **Voraussetzung der Differenzierbarkeit** wurde daraus:

$$u_t(x,t) = -q_x(x,t)$$

Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension

Cauchy-Problem:

$$u_t + f(u)_x = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{auf } \forall x \in \mathbb{R}$$



$f = f(u) =$ Flussfunktion.

Wegen $f(u(x,t))_x = f'(u) \cdot u_x$

wird mit $a(u) := f'(u)$ aus der Dgl.:

$$u_t + a(u) \cdot u_x = 0$$

Also Form von letzter HÜ. Dort: keine Probleme mit eindeutigen Lösungen.

Das muss nicht so sein!

Transportgl. $f(u) = c \cdot u$ linear in u

Heute $f(u) = \frac{u^2}{2}$ nicht linear in u

Burgers Gleichung

$$\boxed{u_t + u u_x \; = \; u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x \; = 0, \qquad u(x,0) \; = \; u_0(x)}$$

Also $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$ Und $f'(u) = u$.

Charakteristiken $=$ Kurven $(x(t), t)$ mit: $x(t)$ löst $\quad \dfrac{dx}{dt} = u$

Entlang der Kurven $(x(t), t)$ gilt wieder: $\quad \dfrac{du}{dt} = 0$

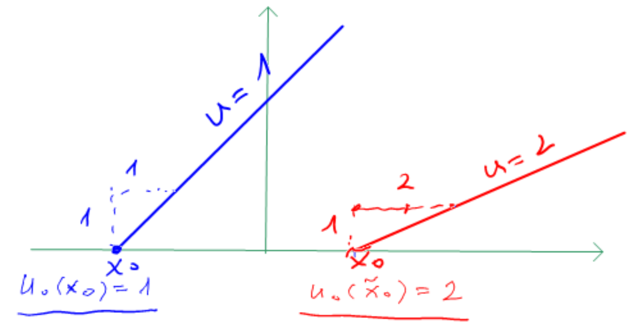
Also für jede Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) \; = \; u_x \cdot \dot{x} + u_t \; = \; u_x \cdot u + u_t \; = \; 0$$

$\Longrightarrow \quad$ Lösung u konstant entlang Charakteristik

$\Longrightarrow$ $\dot{x}(t) = u$ konstant entlang Charakteristik

$\Longrightarrow$ Charakteristiken haben konstante Steigung



$\Longrightarrow$ Charakteristiken sind Geraden.

Die Idee war:
Bestimme zu $(x(t), t)$ auf der zugehörigen Charakteristik $x_0 = x(0)$ in der Form

$$x_0 = x_0(x, t)$$

Dann gilt $\quad u(x,t) = u_0\left(x_0(x,t)\right)$

$$u(x(0), 0) = u_0(x(0)) = u_0(x_0)$$

Frage : Geht das immer eindeutig?

Methode aus letzter HÜ für

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x)$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u(x(t),t) = c_2$$

$$\frac{dx}{dt} = u = c_2 \Longrightarrow x(t) = c_2 t + c_1 = ut + c_1$$

$x = ut + c_1$

Also $\boxed{c_1 = x - ut}$ und $\boxed{c_2 = u}$

und wie in der letzten HÜ:

$$c_2 = \phi(c_1) \Longleftrightarrow \boxed{u = \phi(x - ut)} \text{ (allgemeine Lösung)}$$

implizite Darstellung der Lösung

$t=0$

Anfangswerte

$$t = 0: \; u(x,0) = \phi(x) \overset{!}{=} u_0(x) \text{ Also } \boxed{u = u_0(x - ut).}$$

$\phi = u_0$

z.B. wenn $u(x,0) = \sin(x) = u_0(x)$

$u = \sin(x - ut)$

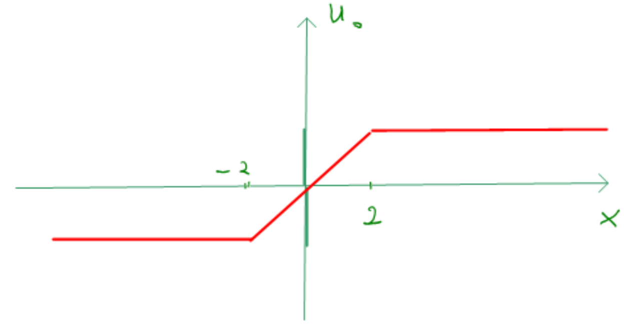
Wegen $\dot{x}(t) = u = u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x(0))$

erhalten wir die Charakteristiken: $\boxed{x(t) = x(0) + u_0(x(0)) \cdot t}$

$x(t)$ wächst auf der Charakteristik mit der Rate/dem Faktor: $u_0(x_0)$

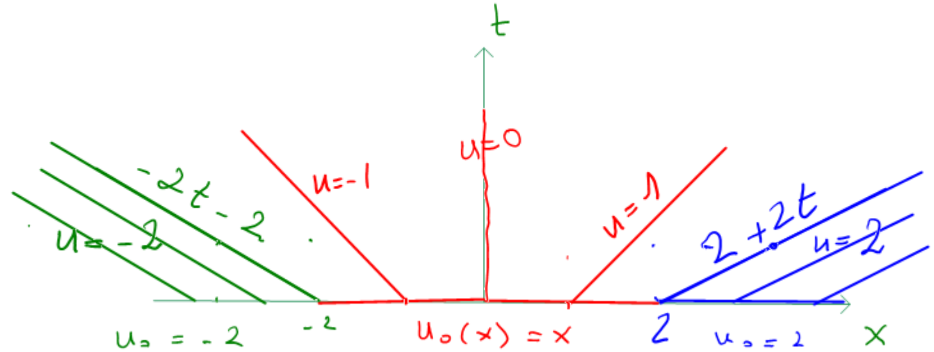
optisch: Steigung in der $x - t-$Ebene: $\frac{1}{u_0(x_0)}$

Beispiel:



$$u(x,0) = \begin{cases} -2 & x < -2 \\ x & -2 \le x \le 2 \\ 2 & x \ge 2 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} -2 & x \le -2t-2 \\ \frac{x}{1+t} & -2t-2 \le x \le 2+2t \\ 2 & x \ge 2+2t \end{cases}$$



$\dot{x}(t) = -2$ $\qquad$ $\dot{x}(t) = 2$

$x(t) = -2t + x_0$ $\qquad$ $x(t) = 2t + x_0$

Für

$-2 < x(0) < 2 \qquad u_0 = Id.$

$\underline{\underline{u}} = u_0(x - ut) = \underline{\underline{x - ut}}$

$u + ut = x \qquad u = \frac{x}{1+t}$

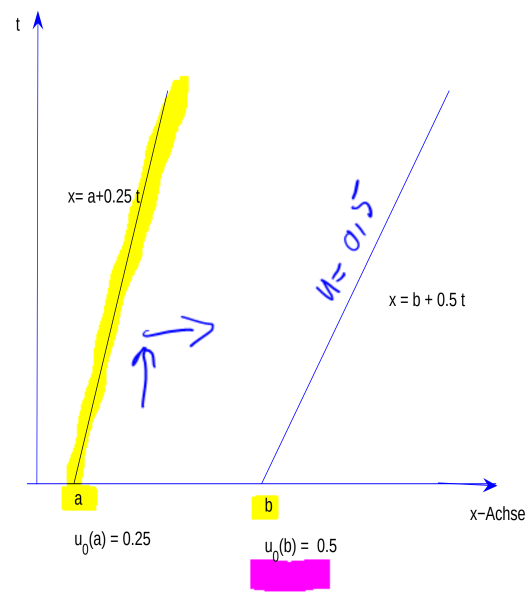
Fall 1) u_0 stetig und monoton steigend: $u_0(a) \le u_0(b) \quad \forall\, a < b$.

Es sei $(x_a(t), t)$ die Charakteristik durch $(a, 0)$ und $(x_b(t), t)$ die Charakteristik durch $(b, 0)$.

Dann gilt: $\dot{x}_a(t) = u_0(a)$ und $\dot{x}_b(t) = u_0(b)$ und damit

$$\dot{x}_a \le \dot{x}_b \qquad \forall\, a \le b$$

x wächst auf der Charakteristik durch (b,0) mindestens so schnell wie auf der Charakteristik durch (a,0). Qualitativ erhält man folgendes Bild

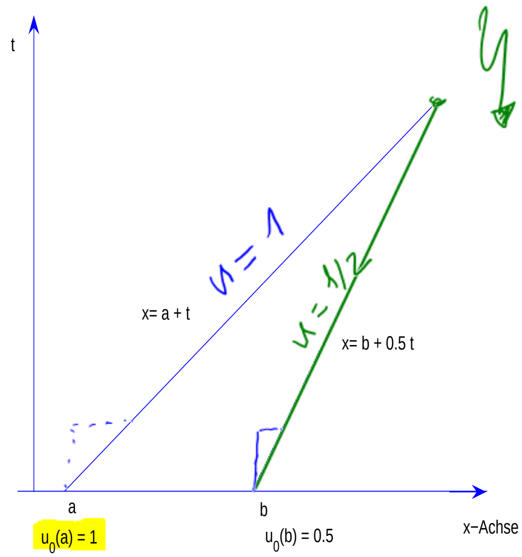


Die Charakteristik durch (a,0) kann die Charakteristik durch (b,0) nicht einholen. Es gibt keine Schnittpunkte von Charakteristiken! Lösung ist eindeutig.

Fall 2) u_0 stetig und $u_0(a) > u_0(b)$ für irgendein $a < b$. Dann gilt

$$\dot{x}_a > \dot{x}_b$$

Die Charakteristik durch (a,0) holt die Charakteristik durch (b,0) irgendwann ein! Es kommt zu Mehrdeutigkeiten!!

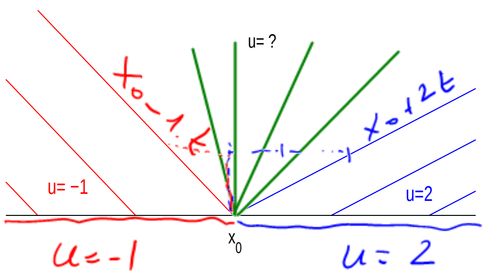


Die Mehrdeutigkeit tritt spätestens dann auf, wenn für ein x_0 und ein $\delta \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$x_0 + u_0(x_0) \cdot t = (x_0 + \delta) + u_0(x_0 + \delta) \cdot t \,.$$

Fall 3) u_0 monoton steigend aber nicht stetig.
Es gibt irgendwo einen Sprung in den Steigungen und damit Gebiete in denen keine Charakteristiken verlaufen.

Beispiel: Burgers Gleichung mit
$$u(x,0) = \begin{cases} -1 = u_\ell & x < x_0 \\ 2 = u_r & x \geq x_0 \end{cases}$$



$\dot{x} = 2$

$x(t) = 2t + x_0$

Für $t > 0$

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x \leq x_0 - t, \\ ?\ \frac{x-x_0}{t} & x_0 - t < x < x_0 + 2t \\ 2 & x \geq x_0 + 2t\,. \end{cases}$$

u_ℓ

u_r

Vorlesung: Der charakteristikenfreie Bereich wird durch eine sogenannte

Verdünungswelle $$u(x,t) = \frac{x - x_0}{t}$$

aufgefüllt.

$u(x,t)$ konstant auf kurven

mit $\frac{x-x_0}{t} = c \iff x - x_0 = ct$

$\iff x = ct + x_0 \qquad t > 0$

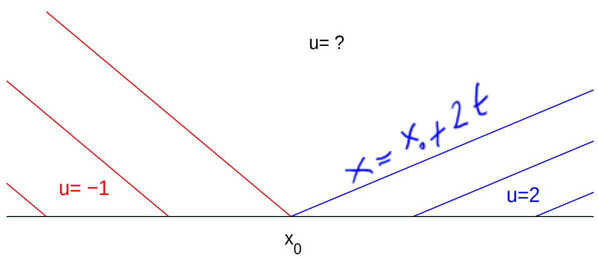
Allgemeiner: Für die Burgers Gleichung mit $u_l < u_r$ und

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\text{löst } u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 + u_l \cdot t, \\ \dfrac{x - x_0}{t} & x_0 + u_l \cdot t < x < x_0 + u_r \cdot t, \qquad t > 0 \\ u_r & x \geq x_0 + u_r \cdot t\,. \end{cases}$$

in jedem einzelnen $(x,t)-$ Bereich die Differentialgleichung. In unserem Beispiel

u ist stetig



Auf der letzten roten Linie:

$$u(x(t),t) = \frac{x - x_0}{t} = -1$$

$x = x_0 - t$

$\dfrac{x - x_0}{t} = \dfrac{x_0 - t - x_0}{t} = \dfrac{-t}{t}$

$\Longrightarrow$ u stetig auf dieser Seite

Auf der ersten blauen Linie:

$$u(x(t),t) = \frac{x - x_0}{t} = 2$$

analog $\dfrac{x_0 + 2t - x_0}{t} = \dfrac{2t}{t} = 2 = u_r$

u stetig auch auf dieser Seite

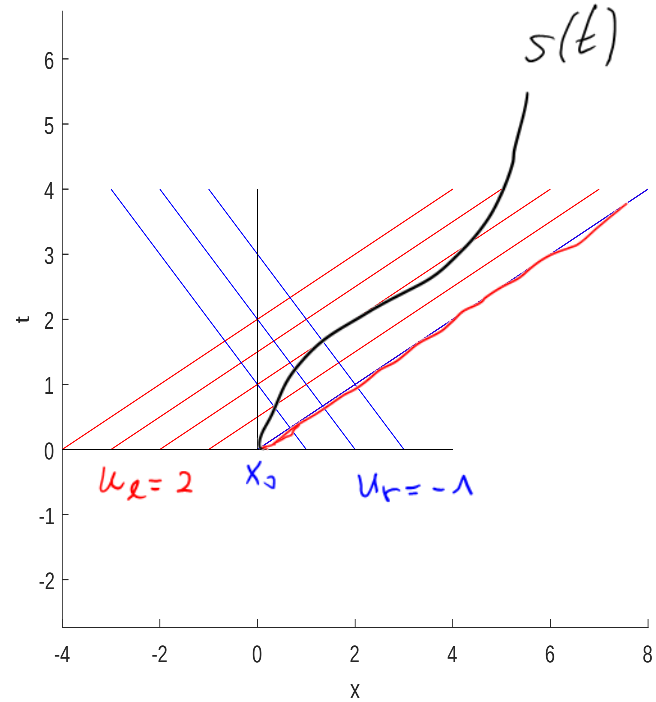
Fall 4) u_0 springt nach unten.

Es gibt irgendwo einen Sprung in den Steigungen und die Charakteristiken schneiden sich.

Beispiel: Burgers Gleichung mit

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = 2 & x < x_0 \\ u_r = -1 & x \geq x_0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq s(t) \\ u_r & x > s(t) \end{cases}$$



Vorlesung: Die Unstetigkeit bewegt sich entlang einer sogenannten **Stoßwelle** $s(t)$ (Schock)

Frage: $s(t) = ?$ Wie muss $s(t)$ aussehen?

vgl. Notizen Vorlesung 2

Schwache Lösungen:

Testfunktionen $v(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ diffbar mit kompaktem Träger:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} u_t \cdot v \, dt \, dx + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (f(u))_x \, v \, dx \, dt = 0$$

$$\int [uv]_0^\infty - \iint u \cdot v_t \qquad \int \left[f(u) v \right]_{-\infty}^{\infty} - \iint f(u) \, v_x$$

Partielle Integration

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + v_x f(u)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v_0(x) dx = 0$$

Bei einer Stoßfront (Unstetigkeitskurve) $s(t)$ muss gelten:

Beweisidee: vgl. Notizen zur Vorlesung 2

Rankine- Hugoniot- Sprungbedingung:

$$\boxed{\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} =: \frac{[f]}{[u]}}$$

Es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(\xi, t) \, d\xi = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

siehe HA 2, Blatt 2

Bei Sprung von u_l auf u_r

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{s_-(t)} + \int_{s_+(t)}^{x_2} \right)}_{} = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

↓ ableiten Leibniz Regel

↓ $x_2 \to s_+(t)$, $x_1 \to s_-(t)$

$$\dot{s}(t) (u_l - u_r) = f(u_l) - f(u_r)$$

für Burgers also $\dot{s}(t) = \dfrac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \dfrac{u_l + u_r}{2}$

$$\frac{u_l^2 - u_r^2}{2(u_l - u_r)} = \frac{\cancel{(u_l - u_r)}(u_l + u_r)}{\cancel{(u_l - u_r)} \cdot 2}$$

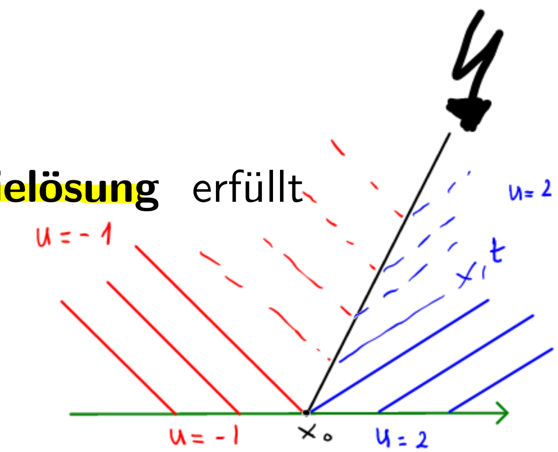
Sei f streng konvex, wie bei Burgers Gleichung.

Warum bei $u_l < u_r$ nicht auch eine Stoßwelle?

Physik / Betrachtung Grenzfall von Lösungen von

$u_t + (f(u))_x = \epsilon u_{xx}$ für $\epsilon \to 0$ liefert:

Die physikalisch sinnvolle, eindeutige schwache Lösung, die **Entropielösung** erfüllt die **Entropiebedingung**:



$$\exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, t, z \in \mathbb{R}^+ : u(x+z,t) - u(x,t) < \frac{C}{t} z.$$

$z \to 0$ $\quad u_r \quad u_l \quad 0$

Damit kann ein Sprung in u nur nach oben erfolgen und jede Stoßfront $s(t)$ einer Entropielösung erfüllt:

$$\boxed{f'(u_l) > \dot{s} > f'(u_r)}$$

f streng konvex

$f'(u_l) > f'(u_r) \iff u_l > u_r$

Für Burgers also: $\quad u_l > \dot{s} > u_r$

HA 3 !

Zusammenfassung:

$$u_t + (f(u))_x = 0, \; (f \text{ streng konvex}), \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_l & x \le x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases}$$

- $u_l > u_r$: Stoßfront $s(t)$ mit $\dot{s}(t) = \dfrac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \le s(t), \\ u_r & x > s(t)\,. \end{cases}$$

- $u_l < u_r$: Verdünnungswelle. Mit $g = (f')^{-1}$

Burgers $f'(u) = u = Id$

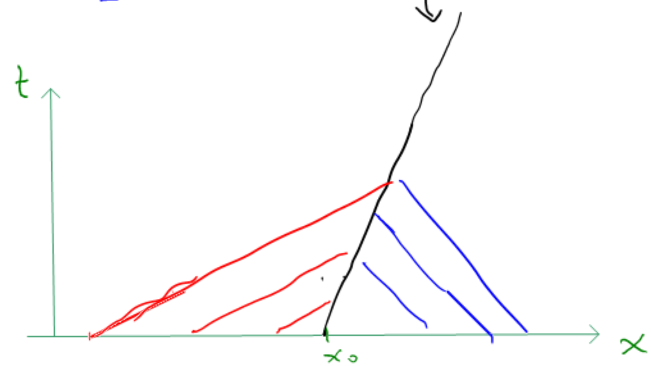
$(f')^{-1} = Id = g$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \le x_0 + f'(u_l) \cdot t, \\ g\left(\dfrac{x - x_0}{t}\right) & x_0 + f'(u_l) \cdot t < x < x_0 + f'(u_r) \cdot t \\ u_r & x \ge x_0 + f'(u_r) \cdot t\,. \end{cases}$$

Zu unseren Beispielen: $u_t + u \cdot u_x = 0$ also $f(u) = \frac{u^2}{2}$, $f'(u) = u =$ Identität

$s(t) = \frac{1}{2}t + x_0$

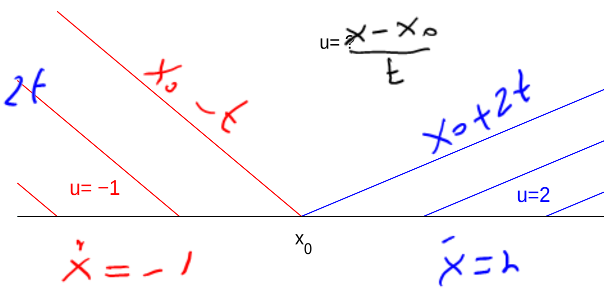
$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = 2 & x < x_0 \\ u_r = -1 & x \geq x_0 \end{cases} \Longrightarrow \dot{s}(t) = \frac{u_l + u_r}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = 2 & x < \frac{1}{2}t + x_0 \\ u_r = -1 & x \geqslant \frac{1}{2}t + x_0 \end{cases}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = -1 & x < x_0 \\ u_r = 2 & x \geq x_0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = -1 & x < x_0 - t \\ \frac{x - x_0}{t} & x_0 - t \leq x \leq x_0 + 2t \\ u_r = 2 & x > x_0 + 2t \end{cases}$$



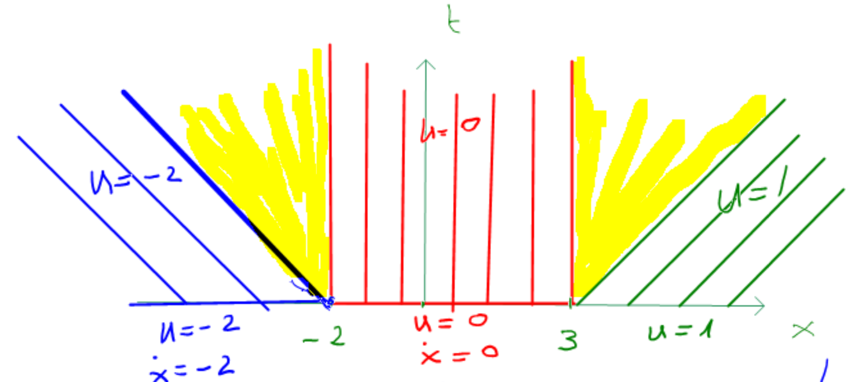
Weitere Beispiele:

A: Mehrere Verdünnungswellen

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & x \le -2\,, \\ 0 & -2 < x \le 3\,, \\ 1 & x > 3\,. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x \le -2-t \\ \frac{x+2}{t} & -2-t < x \le -2 \\ 0 & -2 < x \le 3 \\ \frac{x-3}{t} & 3 < x \le 3+t \\ 1 & x > 3+t \end{cases}$$



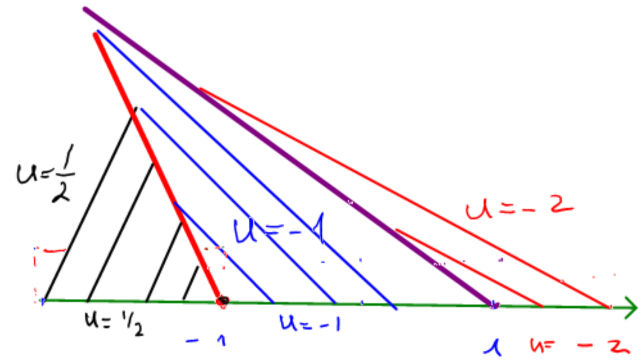
$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x \le x_0 + u_l t \\ \frac{x-x_0}{t} & \\ 0 & x \ge x_0 + u_r t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & x \le -2-t \\ \frac{x-(-2)}{t} & -2-t \le x \le -2 \\ 0 & -2 \le x \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \le 3+0t \\ \frac{x-3}{t} & 3 \le x \le 3+t \\ 1 & x \ge 3+t \end{cases}$$

B: Mehrere Stoßwellen

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \le -1, \\ -1 & -1 < x \le 1, \\ -2 & x > 1\,. \end{cases}$$



Zunächst erhält man

$$\dot{s}_1(t) = \frac{u_l + u_r}{2} = \frac{\frac{1}{2} + (-1)}{+2} = -\frac{1}{4} \qquad s_1(0) = -1 \qquad s_1(t) = -1 - \frac{1}{4}t$$

$$\dot{s}_2(t) = \frac{u_l + u_r}{2} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} \qquad s_2(0) = 1 \qquad s_2(t) = 1 - \frac{3}{2}t$$

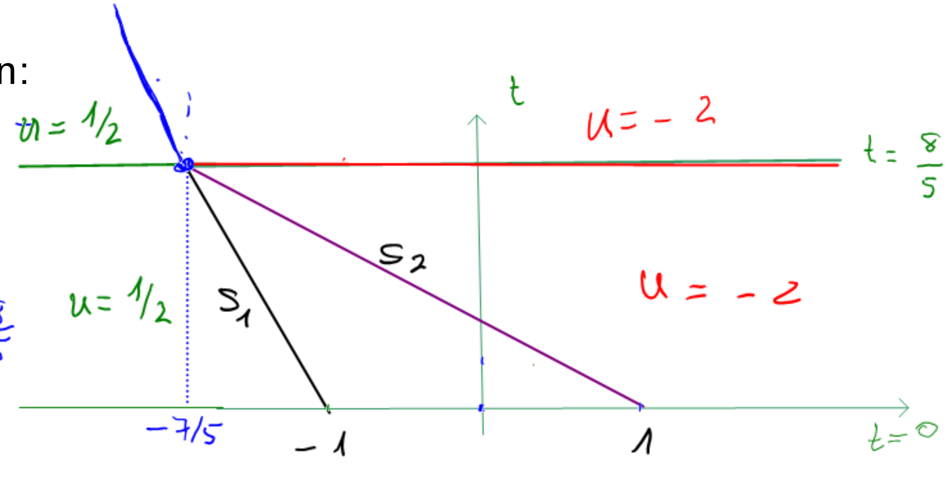
$\Longrightarrow$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \le s_1(t) = -1 - \frac{t}{4} \\ -1 & s_1(t) < x \le s_2(t) = 1 - \frac{3}{2}t \\ -2 & x > 1 - \frac{3}{2}t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/2 & x \le -1 - \frac{t}{4} \\ -1 & -1 - \frac{t}{4} < x \le 1 - \frac{3}{2}t \\ -2 & 1 - \frac{3}{2}t < x \end{cases}$$

so lange bis dieser Bereich leer läuft

Aber nur so lange bis sich die Stoßfronten treffen:



$$s_1(t^*) \overset{!}{=} s_2(t^*) \implies$$

$$-1-\frac{t}{4} = 1-\frac{3}{2}t \Rightarrow \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)t^* = 2 \Rightarrow t^* = \frac{8}{5}$$

Neue Stoßfront mit $u_l = \frac{1}{2}$ und $u_r = -2$

$$s_1\left(\frac{8}{5}\right) = s_2\left(\frac{8}{5}\right) = s_3\left(\frac{8}{5}\right) = -1-\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{8}^{\,2}}{5} = -7/5$$

$$s_3(t) = s_3(t^*) + \dot{s}_3(t)(t-t^*)$$

$$\dot{s}_3 = \frac{u_l+u_r}{2} = \frac{\frac{1}{2}-2}{2} = -\frac{3}{4} \qquad s_3\left(\frac{8}{5}\right) = -7/5$$

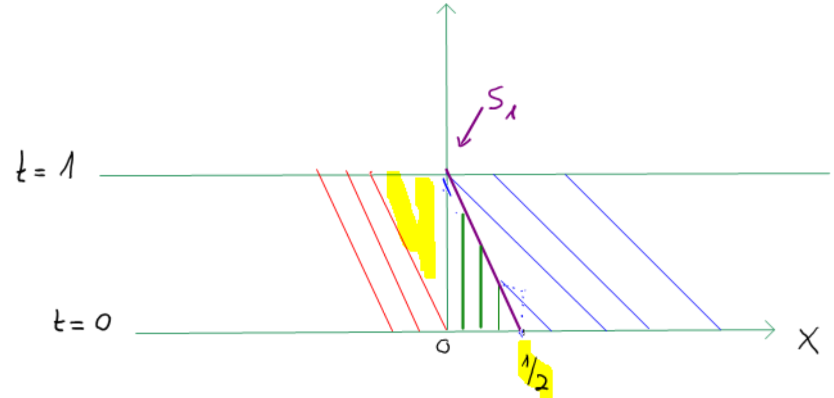
$$s_3 = -\frac{7}{5}-\frac{3}{4}\left(t-\frac{8}{5}\right)$$

Für $t > t^* = \frac{8}{5}$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq s_3(t) = -\frac{7}{5}-\frac{3}{4}\left(t-\frac{8}{5}\right) = -\frac{7}{5}+\frac{3\cdot 8}{4\cdot 5}-\frac{3}{4}t = -\frac{3}{4}t-\frac{1}{5} \\ -2 & x > s_3(t) = -\frac{3}{4}t-\frac{1}{5} \end{cases}$$

C: Stoßwelle trifft Verdünnungswelle

$$u(x,0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \le 0\,, \\ 0 & 0 < x \le \frac{1}{2}\,, \\ -1 & x > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$



Zunächst erhält man wie gahabt
eine Verdünungswelle und eine Stoßwelle:

(Schwache) Lösung zunächst, also für hinreichend kleine t:

$$u(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \le x_0 + u_l \cdot t = 0 - \frac{1}{2}t \\ \frac{x-0}{t} & -\frac{t}{2} < x \le x_0 + u_r \cdot t = 0 + 0t = 0 \\ 0 & 0 < x \le \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ -1 & x > \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$$

← läuft irgendwann leer
also bis $0 = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}$

$$\left.\begin{array}{lll} s_1(t) \text{ mit } & s_1(0) = 1/2 & \\ \text{und} & \dot{s}_1(t) = \dfrac{u_l + u_r}{2} = \dfrac{0-1}{2} = -\dfrac{1}{2} & \end{array}\right\} s(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}$$

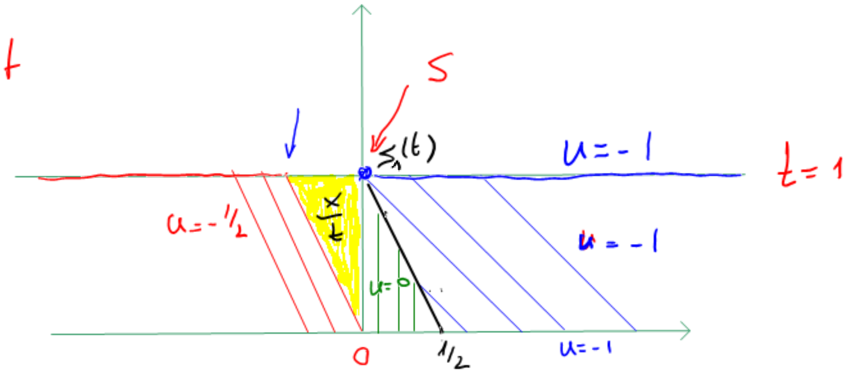
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \le s(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ -1 & x > \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \end{cases}$$

Kann nur gelten bis $t = 1$.

$$u(x,1) = \begin{cases} -1/2 & x \leq -1/2 \\ x & -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ -1 & 0 < x \end{cases}$$

← unverändert

← neu



Dann: Neue Unstetigkeit $s_2(t)$ mit

$$u_l = \frac{x_l}{t}, \; u_r = -1$$

$$u_l = \frac{s_2(t)}{t}, \; u_r = -1 \implies$$

$$\frac{u_l + u_r}{2}$$

$$\dot{s}_2(t) = \frac{\frac{s_2(t)}{t} - 1}{2}$$

$$\boxed{\dot{s}_2(t) = \frac{1}{2t} \cdot s_2(t) - \frac{1}{2}}$$

(inhom. lin. ODE) $\dot{s}_h(t) = \frac{1}{2t} \cdot s_h(t)$

$$s_h(t) = ct^{1/2},$$

$$s_p(t) = c(t)t^{1/2} \Longrightarrow \dot{c}(t)t^{1/2} \stackrel{!}{=} -\tfrac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \dot{c}(t) = -\tfrac{1}{2}t^{-1/2}$$

$$c(t) = -t^{1/2} + d$$

also z.B. $s_p(t) = -t^{1/2} \cdot t^{1/2} = -t$

$$\boxed{s_2(t) = c\sqrt{t} - t}$$

$s_2(1) = 0 \Longrightarrow c \cdot \sqrt{1} - 1 = 0 \Longrightarrow c = 1$

$\Longrightarrow s_2(t) = \sqrt{t} - t$

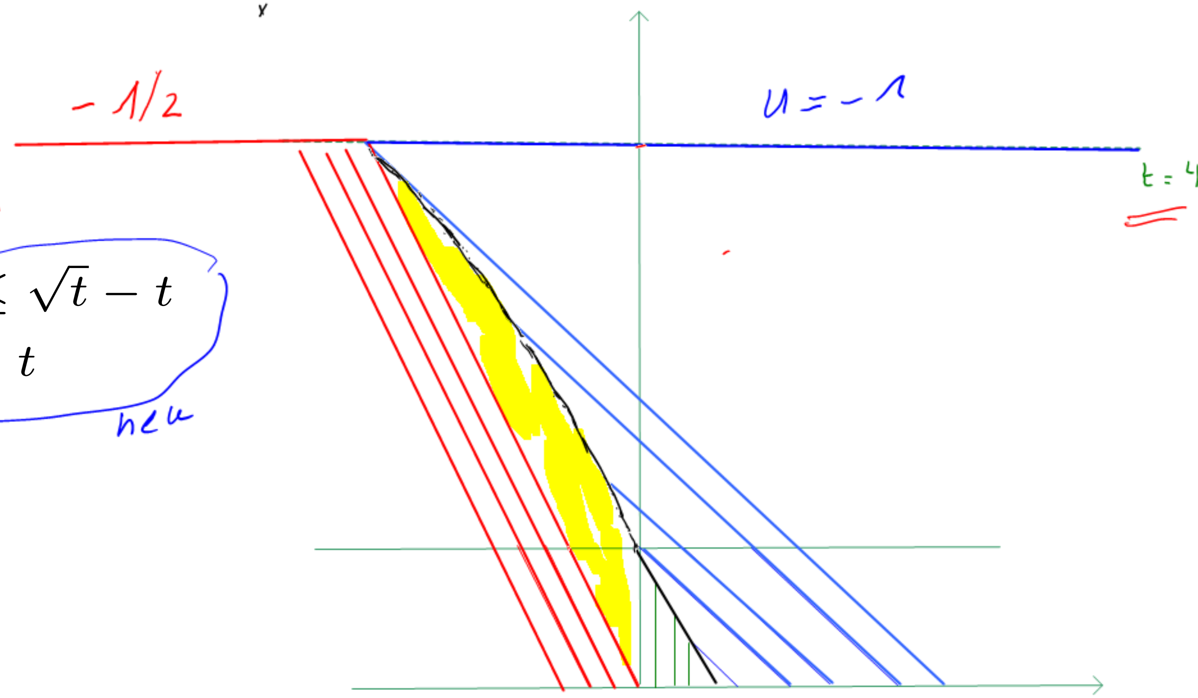
Und nun? Anfangswert? Wo geht $s_2(t)$ los?

Für $t > 1$ gilt zunächst:

alt

$$u(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \le -\frac{t}{2} \\ \frac{x}{t} & -\frac{t}{2} < x \le \sqrt{t} - t \\ -1 & x > \sqrt{t} - t \end{cases}$$

neu



Wie lange?

Für $t = 4$ gilt $-\frac{t}{2} = \sqrt{t} - t$

Stoßwelle ist durch Verdünnungswelle durch! $s_2(4) = -2$, $u_l = -\frac{1}{2}$, $u_r = -1$

Neue Formel für Stoßfront für $t \ge 4$:

$$s_3(t) = s_3(4) + \dot{s}_3(t)(t-4) = -2 + \frac{-\frac{1}{2} - 1}{2} \cdot (t-4)$$

$$u(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \le -\frac{3}{4}t + 1\,, \\ -1 & x > -\frac{3}{4}t + 1\,. \end{cases}$$

Andere Differentialgleichung

$$\boxed{u_t + \left((u+1)^2\right)_x = 0\,, \qquad u(x,0) = u_0(x)}$$

Hier gilt $f(u) = (u+1)^2$ und $f'(u) = 2(u+1) =: v$,

$f'(u) = v \Rightarrow (f')^{-1}(v) = u$

$g(v) = u$

also $g(v) = (f')^{-1}(v) = u = \frac{v}{2} - 1$

$2u + 2 = v$

und $g(\frac{x-x_0}{t}) = \dfrac{\frac{x-x_0}{t} - 2}{2}$

$u = \dfrac{v-2}{2} = g(v)$

Zum Beispiel für

$$u(x,0) = \begin{cases} -1 & x \le 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$$

erhalten wir eine Verdünnungswelle (Seite 15)

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \le x_0 + f'(u_l)\cdot t, \\ g\left(\dfrac{x-x_0}{t}\right) & x_0 + f'(u_l)\cdot t < x < x_0 + f'(u_r)\cdot t \\ u_r & x \ge x_0 + f'(u_r)\cdot t\,. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & x \le 3 \\ \dfrac{\frac{x-3}{t} - 2}{2} & 3 \le x \le 3 + 2t \\ 0 & x \ge 3 + 2t \end{cases}$$

$f'(u) = 2(u+1)$

$f'(u_l) = f'(-1) = 0$

$f'(u_r) = f'(0) = 2$

Für $u_l > u_r$ muss eine Stoßwelle eingeführt werden mit

$$f = (u+1)^2$$

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{(u_l+1)^2 - (u_r+1)^2}{u_l - u_r} =$$

Zum Beispiel für

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 3 \\ -1 & x > 3 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = 0 & x \leq s(t) = s(0) + \dot{s}(t) \cdot t = 3 + 1 \cdot t \\ u_r = -1 & x > s(t) = 3 + 1 \cdot t \end{cases}$$

$u_l = 0$

$u_r = -1$

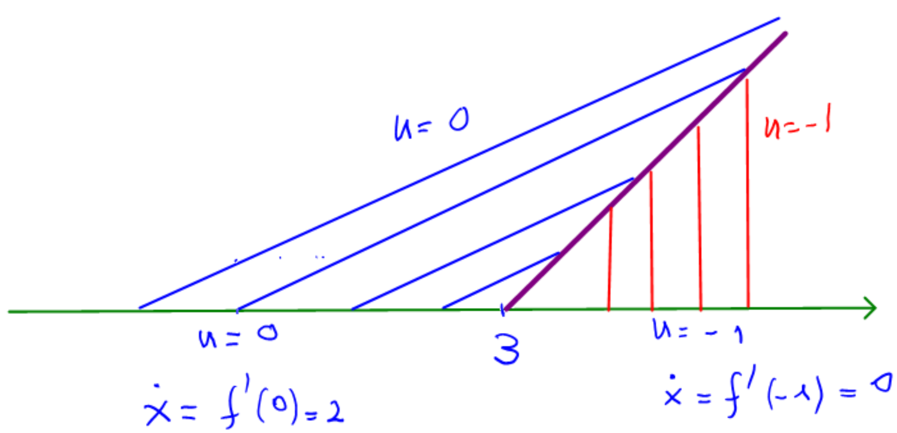
$f(u_l) = (0+1)^2 = 1$

$f(u_r) = (-1+1)^2 = 0$

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = 1$$

$f'(u_l) = 2(u_l+1) = 2$

$f'(u_r) = 2(u_r+1) = 0$



Zur Hausaufgabe 3

Zur Erinnerung: Erhaltungsgleichung lautet

$$(\text{ Dichte })_t + (\text{ Fluss })_x = 0 \qquad \text{hier: } u_t + q_x = 0$$

wobei

$$\text{Fluß} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Dichte}$$

Wenn Sie Teil a) nicht schaffen, geht es in b) weiter mit

$$u_t + \left(u \cdot v_{max} \, (1 - \frac{u}{u_{max}}) \right)_x = 0$$

Die Bedingung für Stoßwellen ist zwar bei Burgers $u_l > u_r$, im Allgemeinen aber:

$$f'(u_l) > f'(u_r) \qquad \text{hier} \qquad q'(u_l) > q'(u_r)$$

Die Sprungbedingung muss gelten!

Stoßwellen: Charakteristiken laufen in Stoßfront rein!