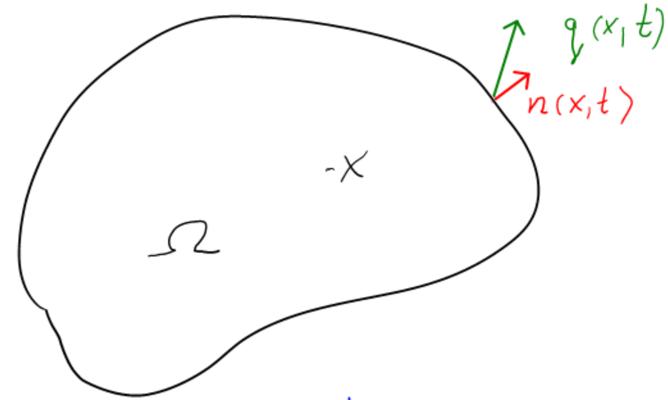
Hörsaalübung 2 Differentialgleichungen II
Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung
Charakteristikenmethode

$u(x,t)$ = Dichte

$q(x,t)$ = Fluss

$M(t)$ = Masse in einem Bereich



$$① \quad M(t) = \int_{\Omega} u(x,t)\,dx$$

$$② \quad M(t) = M(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{\partial\Omega} q \cdot n \right) dt$$

hier müssen u und q nicht differenzierbar sein

$$① = ②$$

umformen

$$u_t(x,t) + \big(q(x,t)\big)_x = 0$$

Dichte

oft $q(x,t) = q(u(x,t), v(x,t))$

Geschwindigkeit

Beispiel Erhaltungsgleichung: $u_t + (q(u, v))_x = 0$

Genauer: $u(x,t)_t + q(u(x,t), v(x,t))_x = 0$

$c \cdot u$

Einfachster Fall mit nicht konstantem $q(x, t)$: Transportgleichung

Dichteprofil bewegt sich mit der Zeit, ohne sich zu verändern

$q(x,t) = c \cdot u(x,t) \longrightarrow u_t(x,t) + c \cdot u_x(x,t) = 0$ kurz $u_t + cu_x = 0$.

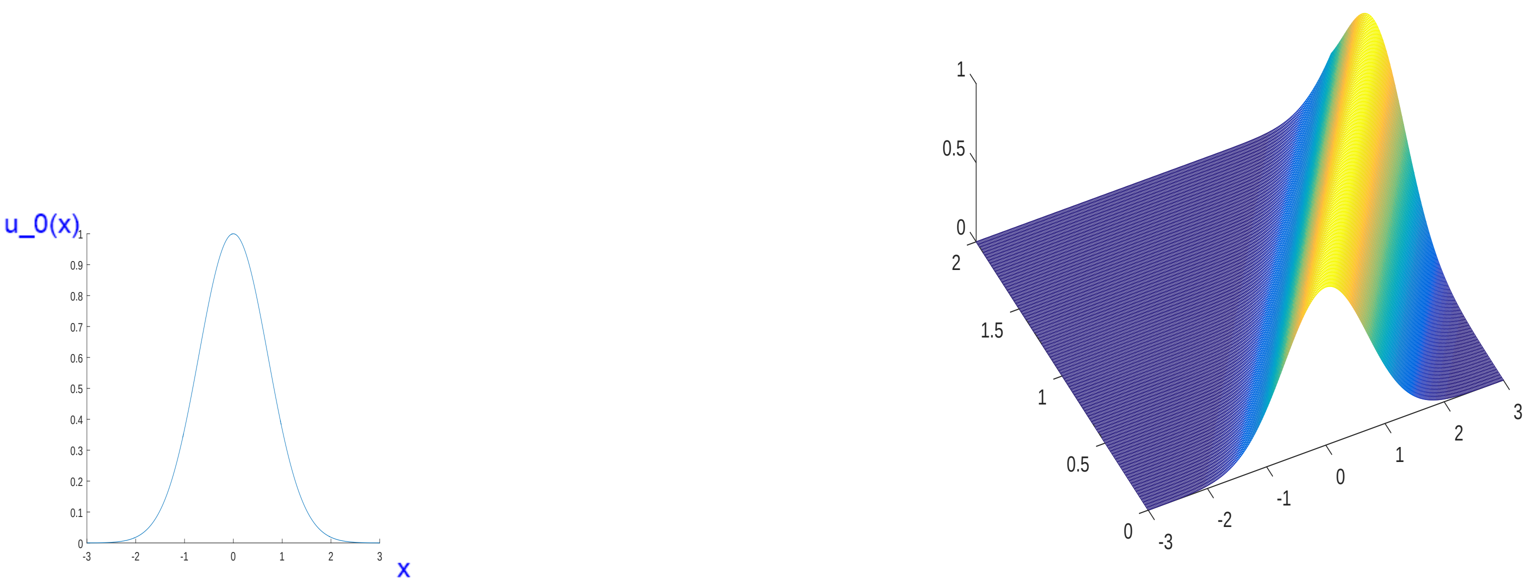
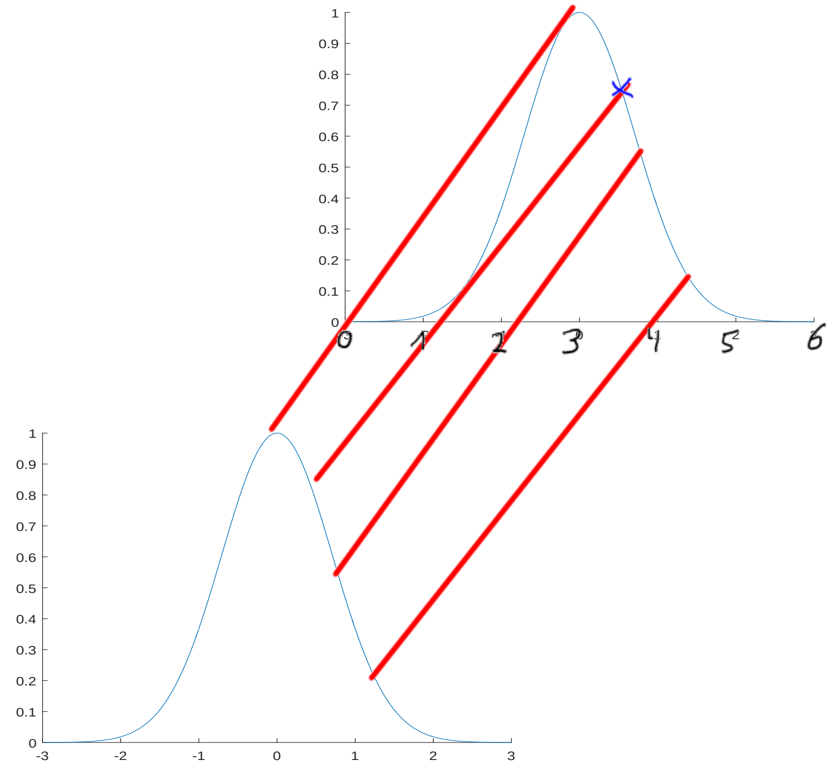


Abbildung 1: Anfangsfunktion $u(x, 0)$ und Lösung $u(x, t)$

Idee: Bei vorgegebenen Anfangswerten auf einer Anfangskurve zum Beispiel für $t = 0$

$$u(x, 0) = u_0(x)$$



- Finde in $(x, t)-$Ebene Kurven $(x(t), t)$ entlang derer u konstant ist

- Finde Schnitt von Kurve
  $(x(t), t)$ mit Anfangskurve (hier $(t = 0)$

- Lese Funktionswert ab.

1. Schritt: Auf den Kurven (**Charakteristiken**) soll $u(x(t),t) = K$ gelten, also

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_x \cdot \dot{x}(t) + u_t \cdot \frac{dt}{dt}$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix}$$

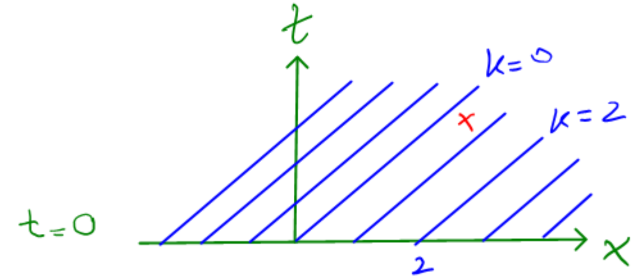
$$= u_t + \dot{x}(t)\, u_x = 0$$ damit u konstant

$$u_t + c\, u_x = 0$$ ⇐ u die Dgl löst

Zusammen: Lösung der Dgl konstant entlang der Kurve wenn $\dot{x}(t) = c$

$$x(t) = ct + K \qquad K \in \mathbb{R}$$

2. Schritt: Zum Beispiel für die Transportgleichung $u_t + cu_x = 0$
mit $u(x,0) = u_0(x) = f(x)$



$\dot{x}(t) = c$

$x(t) = ct + k$

$x(0) = c \cdot 0 + k = k$

$u(x(t),t) = u(x(0),0)$

Welches k gehört zu $\binom{x}{t}$?

$\boxed{k = x - ct}$

$x(0) = k = x - ct$

$u(x,t) = u(x - ct, 0) = u_0(x - ct)$

A: Anfangswertaufgabe für Lineare homogene Differentialgleichung
(Koeffizienten nicht von u abhängig)

$$\beta(x,t)\,u_t(x,t) + a(x,t)\,u_x(x,t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}\,,\, t \in \mathbb{R}^+, \qquad (*)$$
$$u(x,0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Schritt 1: Bestimme Kurven $s \mapsto (x(s), t(s))^T$ mit

$$\frac{dt}{ds} = \beta(x,t) \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t)$$

Dann gilt längs dieser Kurven (**Charakteristiken**)

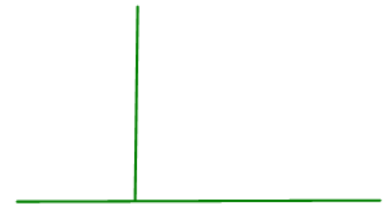
$$\frac{d}{ds}u\,(x(s),t(s)) = u_x \cdot \frac{dx}{ds} + u_t \cdot \frac{dt}{ds} = \underbrace{\beta\,u_t + a\,u_x}_{0 \text{ für Lösung der Dgl}}. = 0$$

Also für jede Lösung u der DGL $\frac{d}{ds}u\,(x(s),t(s)) = 0.$

Jede Lösung der DGL (*) ist (im homogenen Fall) konstant entlang dieser Charakteristiken

Alternativ: Einfacher und schneller geht die konkrete Lösung im Fall $\beta(x,t) \neq 0$ mit t als Parameter:

Wir hatten $\dfrac{dt}{ds} = \beta(x,t) \qquad \dfrac{dx}{ds} = a(x,t)$



Die Charakteristiken sind Kurven $t \mapsto \binom{x(t)}{t}$ mit

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{a(x,t)}{\beta(x,t)}\,.}$$

Schritt 2: Bestimme Schnitt der Charakteristik durch (x,t) mit Kurve der Anfangswerte.

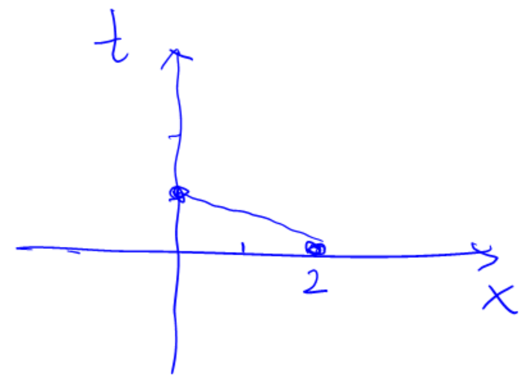
Schritt 3: Lese Wert für $u(x,t)$ ab/Bestimme Formel für u(x,t).

Beispiel 1)

$2u_t - 4u_x = 0, \qquad u(x,0) = \sin(\frac{x}{2})$

$\frac{dt}{ds} = 2 \qquad \frac{dx}{ds} = -4$ oder $\frac{dx}{dt} = \frac{-4}{2} = -2$

$\Longrightarrow x(t) = -2t + k$



Lösung konstant auf den Geraden $x = -2t + k$

Schnittpunkt der Geraden mit der $x-$ Achse $t=0$
(Anfangswerte) : $x(0) = k$

Auf der Charakteristik: $u(x(t),t) = u(x(0),0) = \sin(\frac{x(0)}{2})$

Wie hängt k von x und t ab?

$k = x + 2t$

Lösung : $u(x,t) = \sin(\frac{k}{2}) = \sin(\frac{x+2t}{2})$

ACHTUNG : Die Anfangswerte können nicht beliebig vorgegeben werden.

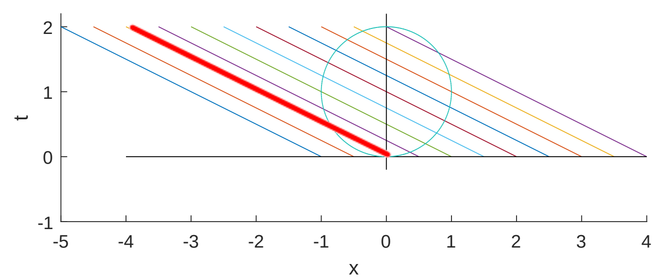
Obige DGL mit

$u(-2a, a) = g(a)$

$\Longrightarrow$ keine oder unendlich viele Lösungen

Obige DGL mit

$u(x,t) = x$ für $\sqrt{(t-1)^2 + x^2} = 1 \quad \Longrightarrow$ keine Lösung.



Beispiel 2) $$1 \cdot u_t + (x+1)u_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dann gilt für die Charakteristiken

$$\frac{dt}{ds} = 1\,, \qquad \frac{dx}{ds} = x + 1\,,$$

oder $$\frac{dx}{dt} = x + 1$$ gewöhnlich Dgl für $x(t)$

Also für $x \neq -1$:

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int dt \implies \ln|x+1| = k + t \implies \boxed{x(t) = ce^t - 1}$$

$c \in \mathbb{R}$

$\xrightarrow{\exp}$ $|x+1| = e^{t+k} = e^t \cdot e^k$

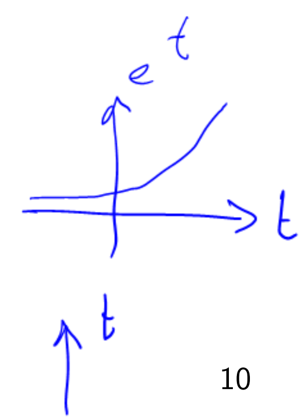
$x + 1 = ce^t$

$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Charakteristiken

$\begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix}$

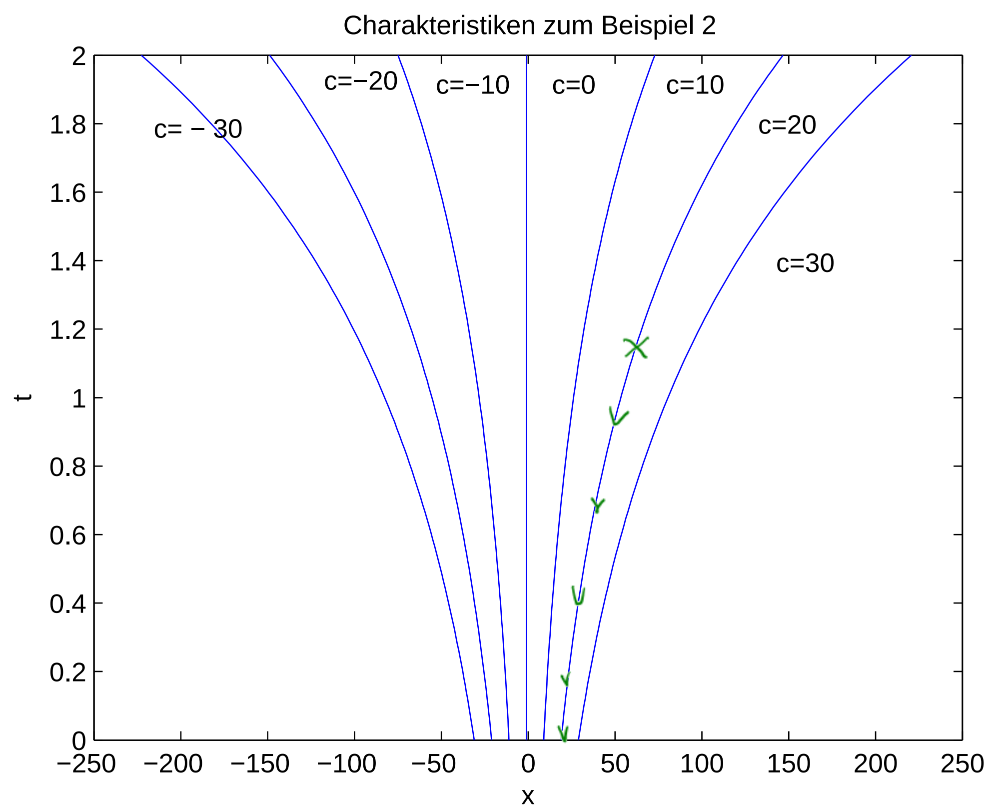
keine geraden



Die Dgl. $u_t + (\overset{0}{x+1})u_x = 0$ lautet für $x = -1$:

$c = 0$ entspricht $x(t) = -1$

$u_t = 0 \implies u(-1,t) = u(-1,0) = g(-1).$



Auf den Kurven ist die Lösung konstant und hängt nur von c ab.

Wir hatten $x(t) = ce^t - 1$ also: $ce^t = x+1$

$$\boxed{c = e^{-t}(x+1)}$$

$x(0) = ce^0 - 1 = c - 1$

Für $t = 0$ gilt $x_0 := x(0) = c - 1$

$u(x(t),t) = u(x(0),0) = u(c-1,0)$
$= g(c-1)$

Das zu (x, t) gehörige x_0 ist also $\boxed{x_0 = e^{-t}(x+1) - 1}$

Auf jeder Charakteristik gilt dann wieder

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = g(x_0) = g\left(e^{-t}(x+1) - 1\right)$$

Beispiel 3): Eine Dimension mehr!

$$2xu_x + yu_y + tu_t = 0, \qquad x, y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

Zum Beispiel versehen mit Anfangsbedingung $u(x, y, \overset{t}{2}) = \sin(x)e^{-y}$.

Suche Kurven $(x(s), y(s), t(s))$ mit $u(x(s), y(s), t(s))$ konstant!

Dann gilt

$$\frac{d}{ds}u(x(s), y(s), t(s)) = u_x \cdot \overset{2x}{\frac{dx}{ds}} + u_y \overset{y}{\frac{dy}{ds}} + u_t \cdot \overset{t}{\frac{dt}{ds}}$$

Charakteristisches Differentialgleichungsystem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 2x \\ \frac{dy}{ds} &= y \\ \frac{dt}{ds} &= t \end{aligned}\right\}$$

charakteristisches Dgl-System

$\hat{=}$ gewöhnliche Dg

$\rightarrow$ lösen

Oder mit t als Parameter für $t \neq 0$ für $2xu_x + yu_y + tu_t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2x}{t} \longrightarrow \int \frac{dx}{x} = 2\int \frac{dt}{t} \longrightarrow \ln(|x|) = 2\ln(|t|) + \hat{c}_1 \xrightarrow{\exp} |x| = e^{\ln(|t|)\cdot 2} \cdot e^{\hat{c}_1}$$

$$\Longrightarrow x = \pm e^{\hat{c}_1} (|t|)^2 = c_1 t^2 \Longrightarrow \boxed{c_1 = \frac{x}{t^2}} \qquad t \neq 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} \Longrightarrow \ln(|y|) = \ln(|t|) + \hat{c}_2$$

$$\dots \quad y = c_2 t \Longrightarrow \boxed{c_2 = \frac{y}{t}}$$

Kurve $\begin{pmatrix} c_1 t^2 \\ c_2 t \\ t \end{pmatrix} = c(t)$

Auf diesen Kurven (Charakteristiken):

$$u = \phi(c_1, c_2) = \phi\left(\frac{x}{t^2}, \frac{y}{t}\right)$$

Allgemeine Lösung

Anfangswerte

$$u(x,y,2) = \phi\left(\frac{x}{2^2}, \frac{y}{2}\right) \overset{!}{=} \sin(x)\, e^{-y}$$

$$\phi(\mu, \alpha) = \sin(4\mu)\, e^{-2\alpha}$$

$$\mu = \frac{x}{4} \qquad \frac{y}{2} = \alpha$$

$$x = 4\mu \qquad y = 2\alpha$$

$$u(x,y,t) = \phi\left(\frac{x}{t^2}, \frac{y}{t}\right) = \sin\left(\frac{4x}{t^2}\right) \cdot e^{-\frac{2y}{t}}$$

Jetzt allgemein: Quasilineare Differentialgleichung 1.Ordnung :

(Koeffizienten dürfen von u abhängen! Kann inhomogen sein)

Zum Beispiel:

$$1 \cdot u_t(x,t) + a(x,t,u)\, u_x(x,t) = b(x,t,u)\,.$$

Hilfsproblem : Suche Funktion $U(x,t,u)$, die die PDE

$$1 \cdot U_t + a(x,t,u) \cdot U_x + b(x,t,u) \cdot U_u = 0 \qquad (1)$$

löst. Wie oben stellen wir auf:

Das charakteristische Differentialgleichungsystem mit s als Parameter

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} = b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = b(x,t,u). \qquad (2)$$

Dann gilt für jede Lösung U der DGL (1) längs dieser Kurven (**Charakteristiken**)

$$\frac{d}{ds} U\left(x(s), t(s), u(s)\right) = U_x \cdot \frac{dx}{ds} + U_t \cdot \frac{dt}{ds} + U_u \cdot \frac{du}{ds}$$
$$= U_t + a\,U_x + b\,U_u = 0$$

Integration des Systems (2) $\Longrightarrow$ Zwei Integrationskonstanten C_1, C_2

Charakteristiken werden durch 2 Parameter festgelegt

$U(x,t,u) = \tilde{\Phi}(C_1, C_2) = K$ konstant auf Charakteristiken

wie im letzten Bsp

$\Phi = \tilde{\Phi} - K \Longrightarrow \Phi(C_1, C_2) = \Phi(C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)) = 0$

implizite Darstellung der Lösung u

Eine Gleichung für zwei Unbekannte: Löse wenn möglich auf $C_2 = f(C_1)$
Löse wenn möglich nach u auf!

Exkurs: Nachweis Zusammenhang DGL (1) und ursprüngliches Problem

Auf jeder Charakteristik: $U(x, t, u) - K = 0$.

Falls $U_u \neq 0$, dann kann nach dem Satz über implizite Funktionen nach u aufgelöst werden: $u = u(x, t)$ mit

$u = \varphi(x, t)$

$$\begin{matrix} \varphi_x \\ \varphi_t \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = -(U_u)^{-1} \begin{pmatrix} U_x \\ U_t \end{pmatrix}$$

$-U_u u_x = U_x$

$-U_u u_t = U_t$

Also $U_x = -u_x \cdot U_u \qquad U_t = -u_t \cdot U_u$

$$(1) \qquad U_t + a\,U_x + b\,U_u = 0 \iff -u_t \cdot \cancel{U_u} - a\,u_x \cdot \cancel{U_u} + b\,\cancel{U_u} = 0$$
$$\iff -u_t - a\,u_x + b = 0$$

$b = u_t + a u_x$

u löst also ursprüngliche Differentialgleichung.

Beispiel 1: Eine lineare inhomogene Anfangswertaufgabe

1 $\cdot\; u_t - 2u_x = t, \qquad u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$

Schritt 1: Charakteristisches Differentialgleichungssystem aufstellen:

$\frac{dx}{dt} = -2 \qquad\qquad \frac{du}{dt} = t$

Schritt 2: Lösen, Integrationskonstanten mit Hilfe der Variablen ausdrücken

$\Longrightarrow x(t) = -2t + C \qquad\qquad u(t) = \frac{t^2}{2} + D$

$C = x + 2t \qquad\qquad D = u - \frac{t^2}{2} \qquad\qquad \phi(C, D) = 0$

Schritt 3: Wenn möglich $D = f(C)$ nach u auflösen

$\phi\left(x+2t,\ u - \frac{t^2}{2}\right) = 0$

$u - \frac{t^2}{2} = f(x+2t)$

$* \quad \boxed{u = \frac{t^2}{2} + f(x+2t)}$ Allgemeine Lösung

Schritt 4: f und damit u mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.

$$u(x,0) \overset{\circledast}{=} \frac{0^2}{2} + f(x + 2 \cdot 0) = \boxed{f(x) \overset{!}{=} \frac{1}{1+x^2}}$$

$$u(x,t) = \frac{t^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{1+(x+2t)^2}}_{f(x+2t)}$$

Beispiel 2)

$y=1$

$$1 \cdot u_x + y^2 u_y = u^2, \qquad u(x,1) = 1 \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+$$

Hilfsproblem: U

Parameter x gewählt

Schritt 1: Charakteristisches Differentialgleichungsystem aufstellen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1}$$

Schritt 2: Lösen, Integrationskonstanten mit Hilfe der Variablen ausdrücken

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx\,, \Longrightarrow -\frac{1}{y} = x - C_1 \Longrightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{y} + x}$$

völlig analog erhält man $\boxed{C_2 = \frac{1}{u} + x}$

Schritt 3: Wenn möglich $C_2 = f(C_1)$ nach u auflösen

Lösungen erfüllen : $\quad \Phi(C_1, C_2) = \Phi(\frac{1}{y} + x, \frac{1}{u} + x) = 0$

Im Falle der Auflösbarkeit gilt: $C_2 = f(C_1)$

$$\frac{1}{u} + x = f\left(\frac{1}{y} + x\right)$$

$$\frac{1}{u} = f\left(\frac{1}{y} + x\right) - x \qquad u(x,y) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{y} + x\right) - x}$$

Allgemeine Lösung

Schritt 4: f und damit u mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.

Anfangswerte $\quad u(x,1) \overset{!}{=} 1$:

$$u(x,y) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{y} + x\right) - x} \overset{y=1}{\Longrightarrow}$$

$$u(x,1) = \frac{1}{f(1+x) - x} \overset{!}{=} 1$$

$$1 = f(1+x) - x$$

$$1 + x = f(\underbrace{1+x}_{\mu}) \longrightarrow f = \text{Identität}$$

$$\mu = 1 + x \longrightarrow x = \mu - 1$$

$$1 + \mu - 1 = f(\mu) \Longleftrightarrow \mu = f(\mu)$$

$$\overset{f = Id}{\longrightarrow} \quad u(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{y} + \underbrace{x - x}_{0}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$$

Beispiel 3: (nur bei genügend Zeit)

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$1.\ u_t + 2xu_x = tu, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,$$
$$u(x,0) = \sin(x).$$

Lösung:

Für die Charakteristiken gilt

$$\frac{dx}{dt} = 2x \quad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dx}{x} = \int 2\, dt \longrightarrow \ln(|x|) = 2t + \hat{c}_1$$
$$|x| = e^{2t} \cdot e^{\hat{c}_1}$$

$$x(t) = c_1 e^{2t}, \xrightarrow{e^{-2t}} \boxed{c_1 = xe^{-2t}.}$$

Auf diesen Charakteristiken gilt

$$\frac{du}{dt} = tu \quad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{u} = t \cdot dt \longrightarrow \ln(|u|) = \frac{t^2}{2} + \tilde{c}_2 \xrightarrow{\exp}$$
$$u = \pm e^{t^2/2 + \tilde{c}_2} = \pm e^{t^2/2} \cdot e^{\tilde{c}_2}$$

$$u(x(t),t) = c_2 e^{\frac{t^2}{2}} \Longrightarrow \boxed{c_2 = u e^{-t^2/2}}$$

Also $c_2 = \; ue^{-\frac{t^2}{2}}$

~~Mit einem geeigneten Φ gilt dann:~~ $\Phi(c_1, c_2) = 0 \implies$

Falls auflösbar nach c_2 : $\boxed{c_2 = \; f(c_1) :}$

$c_2 = ue^{-t^2/2} = f(c_1) = f(xe^{-2t})$

$ue^{-\frac{t^2}{2}} = f(xe^{-2t})$

$\boxed{u = e^{t^2/2} f(xe^{-2t})}$ 1

Andererseits $u(x, 0) \stackrel{!}{=} \sin(x)$, also

$u(x, 0) = e^0 \cdot f(x \cdot e^0) \stackrel{!}{=} \sin(x) \iff \boxed{f(x) = \sin(x)}$ 2

Damit erhalten wir die Lösung

1 + 2 $\qquad u(x, t) = \sin(xe^{-2t}) \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$.