Hinweise zu den Blättern 1 Differentialgleichungen II
Fourier-Reihen

Fourier-Reihe vgl. Analysis II. Hier nur ein kurzer Überblick

Sei V der Vektorraum der stetigen, T–periodischen Funktionen versehen mit dem inneren Produkt

$$< f, g >:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt\,.$$

Dann bilden die Funktionen $u_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$u_k(x) := \cos(k\omega t)$, $v_k(t) := \sin(k\omega t)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

bzgl. $< .\,, . >$ ein **Orthonormalsystem**. D.h.:

$$\frac{2}{T}\int_0^T \sin(k\omega t)\cdot\sin(l\omega t))dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l, \\ 1 & \text{falls } k = l. \end{cases} \qquad \forall k, l \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\cdot\cos(l\omega t))dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l, \\ 1 & \text{falls } k = l. \end{cases} \qquad \forall k, l \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\cdot\sin(l\omega t))dt = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N}\,,$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(k\omega t))dt = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,,$$

$$\frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt = 1\,.$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und $\mathbf{T}$**−periodisch**.
Dann wird die reelle **Fourier-Reihe** von f definiert als

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit den **Fourier-Koeffizienten**

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt \; = < f, \cos(k\omega t) > \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt \; = < f, \sin(k\omega t) > \qquad k \in \mathbb{N}$$

Die Fourierreihe konvergiert gegen $\frac{1}{2}(f_-(t) + f_+(t)$
Schreibweise: $F_f(t) \sim f(t) \qquad (= f(t)$ falls f stetig in t)

Ist **f gerade** also $f(-t) = f(t)$ so gilt

$$b_k = 0 \;\text{ und }\; a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Ist **f ungerade** also $f(-t) = -f(t)$ so gilt

$$a_k = 0 \;\text{ und }\; b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt \qquad k \in \mathbb{N}$$

Eigenwertaufgaben

BEISPIEL: Parameterabhängige Randwertaufgabe (RWA):

Gegeben ist die RWA

$$y''(x) + \lambda\, y(x) \;=\; 0 \quad y(0) \;=\; y(L) \;= 0\,.$$

mit festen vorgegebenen Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathbb{R}^+$.

Die sogenannte triviale Lösung ist: $y(x) = \; 0, \, \forall x$.

Wir suchen **nichttriviale reelle Lösungen:**

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen?

Die λ, für die es nichttriviale Lösungen gibt, heißen **Eigenwerte** der Aufgabe. Die zugehörigen Lösungen heißen **Eigenfunktionen**.

Vorgehen bei Dgl. 2. Ordnung:

– Nullstellen μ_1, μ_2 des Charakteristischen Polynoms bestimmen,

– Lösung der Dgl:

Bei $\mu_2 = \mu_1:\; y(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 x e^{\mu_1 \cdot x}$,

Bei $\mu_2 \neq \mu_1:\; y(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 \cdot x}$.

Falls $\mu_2 = \overline{\mu_1} \notin \mathbb{R}$:

$y(x) = c_1 \mathrm{Re}\,(e^{\mu_1 x}) + c_2 \mathrm{Im}\,(e^{\mu_1 x})$.

– c_1 und c_2 mit Hilfe der Randdaten bestimmen (vgl. DGL I).