

Hinweise zu den Blättern 1 Differentialgleichungen II Fourier-Reihen

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Die Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Fourier-Reihe vgl. Analysis II. Hier nur ein kurzer Überblick

Sei V der Vektorraum der stetigen, T -periodischen Funktionen versehen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle := \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

Dann bilden die Funktionen $u_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$u_k(x) := \cos(k\omega t), v_k(t) := \sin(k\omega t), \quad k \in \mathbb{N}, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein **Orthonormalsystem**. D.h.:

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \cdot \sin(l\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l, \\ 1 & \text{falls } k = l. \end{cases} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cdot \cos(l\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l, \\ 1 & \text{falls } k = l. \end{cases} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cdot \sin(l\omega t) dt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N},$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(k\omega t) dt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dt = 1.$$

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und **T-periodisch**.

Dann wird die reelle **Fourier-Reihe** von f definiert als

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit den **Fourier-Koeffizienten**

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt = \langle f, \cos(k\omega t) \rangle \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \langle f, \sin(k\omega t) \rangle \quad k \in \mathbb{N}$$

Die Fourierreihe konvergiert gegen $\frac{1}{2}(f_-(t) + f_+(t))$

Schreibweise: $F_f(t) \sim f(t)$ ($= f(t)$ falls f stetig in t)

Ist **f gerade** also $f(-t) = f(t)$ so gilt

$$b_k = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Ist **f ungerade** also $f(-t) = -f(t)$ so gilt

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad k \in \mathbb{N}$$

Eigenwertaufgaben

BEISPIEL: Parameterabhängige Randwertaufgabe (RWA):

Gegeben ist die RWA

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad y(0) = y(L) = 0.$$

mit festen vorgegebenen Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathbb{R}^+$.

Die sogenannte triviale Lösung ist: $y(x) = 0, \forall x$.

Wir suchen **nichttriviale reelle Lösungen:**

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen?

Die λ , für die es nichttriviale Lösungen gibt, heißen **Eigenwerte** der Aufgabe. Die zugehörigen Lösungen heißen **Eigenfunktionen**.

Vorgehen bei Dgl. 2. Ordnung:

- Nullstellen μ_1, μ_2 des Charakteristischen Polynoms bestimmen,
- Lösung der Dgl:

Bei $\mu_2 = \mu_1$: $y(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 x e^{\mu_1 x}$,

Bei $\mu_2 \neq \mu_1$: $y(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$.

Falls $\mu_2 = \overline{\mu_1} \notin \mathbb{R}$:

$y(x) = c_1 \operatorname{Re}(e^{\mu_1 x}) + c_2 \operatorname{Im}(e^{\mu_1 x})$.

- c_1 und c_2 mit Hilfe der Randdaten bestimmen (vgl. DGL I).