Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

SoSe 23
07.07.2023

Klausurberatung Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig und möglicherweise irreführend!

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt nicht!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Absolut notwendige Techniken

- Einfache gewöhnliche DGL lösen, zum Beispiel
  - Separierbare (vgl. z. B. Charakteristiken Methode)
  - Lineare mit konstanten Koeffizienten (vgl. z. B. Wärmeleitungsgleichung)

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = p_n(t) \cdot e^{\mu t}, \qquad p_n \text{ Polynom n-ten Gerades}$$

$y_h(t) = \gamma e^{-\alpha t}$

Ansatz: $y_p(t) = \gamma(t) e^{\alpha t}$ oder,
vorausgesetzt $-\alpha \neq \mu$: $y_p(t) = (d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \ldots + d_n t^n) \cdot e^{\mu t}$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

γ über Anfangswert bestimmen!

- Ganz einfache Integrale, partielle Integration

  Zum Beispiel für d'Alembert, Fourierkoeffizienten, Charakteristiken

- Fourier-Koeffizienten berechnen (Blätter 5, 6, 7)

- polar $<--->$ kartesisch (Blatt 4P) $x = r\cos(\varphi)$ $y = r\sin(\varphi)$ $r^2 = x^2 + y^2$

- Determinante/Eigenwerte von 2x2 Matrizen (Blatt 4P, 4H)

Blatt 1:

WZ = Werkzeug
XXX wichtig

P1: Lösungen Eigenwertaufgabe $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(L) = 0$ WZ

P2: Gerade/Ungerade Fortsetzung von Funktionen, Fourier-Reihen WZ

H1: Leibnizregel für die Ableitung von Integralen WZ $\emptyset$

H2: Fourier-Reihen WZ

Blatt 2:

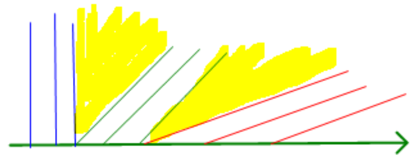
P1, P2, H1: Charakteristiken-Methode Standard, AWA: XXX

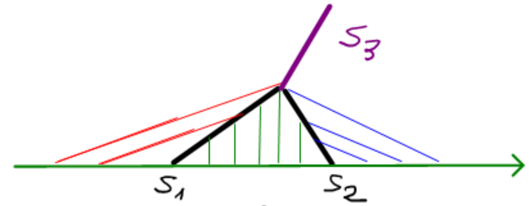
$$u_t + a(x,t,u)u_x = b(x,t,u)$$

P3: Erste nichtlineare Dgl , Fragen zu Charakteristiken: XXX
Form der Charakteristik/ Lösung konstant entlan Charakteristiken?

H2: Verkehrsmodel, Kontinuitätsgleichung, Transportgleichung $u_t - cu_x = 0$ $\varnothing$

Blatt 3:





P1: Burgers Gleichung: zwei Verdünnungswellen bzw. zwei Stoßwellen

P2: Stoßwelle/Verdünnungswelle für Erhaltungsgleichung:

$f(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$

$$u_t + \left(\frac{(u-2)^4}{2}\right)_x = 0,\ u(x,0) = u_0(x)$$

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

Form der Charakteristiken, Sprungbedingung, Entropielösung

$$f'(u_l) > \dot{s}(t) > f'(u_r)$$

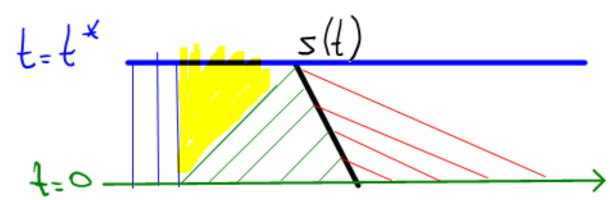
P3) Kür Aufgabe: Irreversibilität: $\emptyset$

Zur bestimmten Zeit gleiche Lösung für verschiedene Anfangsdaten $\emptyset$
(stkw. linear/Treppenfunktion)

H1) Begriffe: Schwache Lösung, Entropielösung, Sprungbedingung
für andere Flussfunktionen, hier $f(u) = u^3$

H2) Burgers Gleichung: Verdünnungswelle trifft Stoßwelle.

Nur bis Stoß und Verdünnung sich treffen. Im Bild t^*



H3) Verkehrsmodell, nicht konvexe Flussfunktion.

H3a) Kontinuitätsgleichung aufstellen $\not{o}$

H3b) Sind die Charakteristiken Geraden? ✓ xxx

H3c) Charakteristiken skizzieren nur wenn es hilft

H3d) Entropiebedingung: $f'(u_l) > \dot{s}(t) > f'(u_r)$ ✓ xxx

Blatt 4: Differentialgleichungen zweiter Ordnung

P1) Nur Hauptteil: $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} = 0.$

xxx

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

1a-b) xxx

Matrix-Schreibweise $\nabla^T A \nabla\, u = 0$ $\rightarrow$ EWe λ_1, λ_2

Diagonalform $\lambda_1 u_{\eta\eta} + \lambda_2 u_{\tau\tau} = 0$

$D := a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2$

Typ: parabolisch, elliptisch, hyperbolisch

$D \begin{cases} < 0 & \text{hyperbolisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ > 0 & \text{elliptisch} \end{cases}$

c) Zusammenhang alte/neue Koordinaten (EV'n von A ...) $\varnothing$

z.B. $u(x,y) = x$ auf Rand

$\Delta u = 0$, $u = ?$

P2) Eigenschaften harmonische Funktionen

b-d) Mittelwertsatz, Min-/Max-Prinzip/Eindeutigkeit x x x

a) Poissonsche Integraldarstellung der Lösung $\varnothing$

H1a) Typ bestimmen (parabolisch, elliptisch, hyperbolisch), auch $x, y-$abgängig xxx

$D(x,y) \begin{cases} < 0 & \text{hyperbolisch} \\ = 0 & \text{parabolisch} \\ > 0 & \text{elliptisch} \end{cases}$

z.B. konkret $\binom{x}{y} = \binom{3}{5}$ und $\binom{x}{y} = \binom{10}{20}$ vorgegeben

H2) Transformation mit Hilfe einer gegebenen Substitution. $\varnothing$

Entstandene Differentialgleichung $v(\alpha, \mu)_{\alpha\mu} = 0$ integrieren $\varnothing$

Blatt 5:

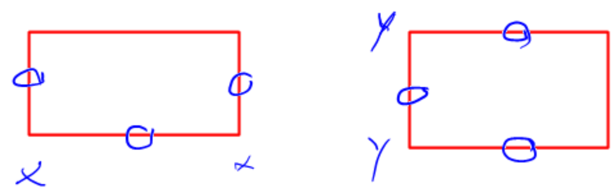
P1) Laplace Gleichung in Kreisscheibe: Produktansatz. xxx

$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung

$\longrightarrow$ Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

P2) a-b) Laplacegleichung auf Rechteck (auf drei Rändern Null)

P2) c) Superposition.



$\emptyset$

H1a) Laplace Gleichung polar herleiten. $\emptyset$

H1b) Rotationssymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung auf Ring.

$u_{\varphi\varphi} = 0$ $\quad \frac{1}{r^2} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = \dots$ gewöhnliche Dgl $\quad \emptyset$

H2) Laplace Gleichung auf Rechteck mit Berechnung Fourier-Koeffizienten

$\emptyset$

Blatt 6:

P) ARWA: Inhomogene Wärmeleitung, inhomogene Randwerte

$A)$ Homogenisieren der Randdaten

$\longrightarrow$ inhomogene DGL, Anfangsdaten $\neq 0$

Bei neuer Aufgabe angeben Dgl, Anfangswerte und Randbedingungen

$\rightarrow B)$ Problem 1: homogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz

geschlossene Lösungsdarstellung

Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

$\rightarrow C)$ Problem 2) inhomogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz

geschlossene Lösungsdarstellung

System gewöhnlicher Differentialgleichung

Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

Wenn, dann direkt (ohne A) und möglichst einfach. z. B.

$$u_t - c u_{xx} = \underbrace{A \sin(m \cdot \omega x)}_{h(x,t)}$$

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot x)$$

$c_n(t) = 0$ für $n \neq m$, $c_m(t) = A$

Anfangswerte $u(x,0) = 0$

$\longrightarrow a_n(t) = 0 \quad \forall n \neq m$

$\rightarrow D)$ Lösung der ursprünglichen Aufgabe zusammensetzen

eine gewöhnliche Dgl: $\begin{cases} \dot{a}_m(t) + c m^2 w^2 a_m(t) = A \\ a_m(0) = 0 \end{cases}$

$\longrightarrow$ lösen $\longrightarrow u(x,t) = a_m(t) \sin(m \omega x)$

H1) ARWA Wärmeleitung, alte Klausuraufgabe (Prof. Behrens)

a) Homogenisieren der Randdaten
$\longrightarrow$ homogene DGL, Anfangsdaten $\neq 0$

b) Homogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz
geschlossene Lösungsdarstellung
Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

H2) Wärmeleitungsgleichung,
Herleitung Lösungsansatz für Neumann-Randbedingungen
Beispiel mit Berechnung der Fourier-Koeffizienten lösen. $\emptyset$

Blatt 7:

P1) ARWA Wellengleichung, inhomogene Randdaten,

Bei neuer Aufgabe angeben
Dgl, Anfangswerte und Randbedingungen

a) Homogenisieren der Randdaten xxx

b) homogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz
geschlossene Lösungsdarstellung xxx
Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

P2) AWA Wellengleichung, inhomogene Dgl.

a) Formel für Lösung der inhomogenen Dgl. mit Null-Randdaten beweisen

∅

b) Homogene Differentialgleichung: d'Alembert,
inhomogene Differentialgleichungmit Formel aus a)
Zusammensetzen.

H1)ARWA: Inhomogene Wellengleichung, homogene Randwerte $\emptyset$

$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung

$\longrightarrow$ System linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$\longrightarrow$ Daten aus Koeffizientenvergleich mit Fourier-Reihen

$\longrightarrow$ aber ODEs zu lösen.

H2) Telegraphengleichung $\emptyset$

In der Klausur: direkt die in Vorlesung/HÜ erarbeiteten Lösungsformeln verwenden!

Zusammenstellung einiger (nicht aller) geschlossener Lösungsformeln für **Differentialgleichungen zweiter Ordnung** unter:

Formeln

`https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/23/uebu`
`formelsammlung_d2_23.pdf`

(ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

Zusammenstellung einiger (nicht aller) Formeln für Differentialgleichungen erster Ordnung:

Charakteristikenmethode

$$u_t(x,t) + a(x,t,u)\, u_x(x,t) = b(x,t,u)\,.$$

Hilfsproblem :

$$U_t + a \cdot U_x + b \cdot U_u = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} = b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = b(x,t,u). \qquad (2)$$

Lösen/Integrieren liefert $C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)$

Setze $C_2 = f(C_1)$

und besimme f mit Hilfe der Anfangsbedingung, löse wenn möglich auf nach u.

Burgers und ähnliche Gleichungen, Verdünnungs- und Stoßwellen

$$u_t + (f(u))_x = 0\,.$$

$$\frac{dx}{dt} = f'(u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = 0. \tag{3}$$

Charakteristikensteigung hängt nur von u ab

u ist konstant auf Charakteristik

Charakteristiken sind Geraden.

Oft sind Skizzen hilfreich

Für (Riemann Problem)

$u_t + (f(u))_x = 0, (f$ streng konvex$)$, $\qquad u(x,0) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases}$

Entropielösung: $f'(u_l) > \dot{s}(t) > f'(u_r)$

- Im Fall $f'(u_l) > f'(u_r)$: Stoßfront (Unstetigkeitskurve) $s(t)$ mit:

  Rankine- Hugoniot- Sprungbedingung:

$$\boxed{\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} =: \frac{[f]}{[u]}}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \le s(t), \\ u_r & x > s(t)\,. \end{cases}$$

- Im Fall $u_l < u_r$: Verdünnungswelle. Mit $g = (f')^{-1}$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \le x_0 + f'(u_l) \cdot t, \\ g\left(\dfrac{x - x_0}{t}\right) & x_0 + f'(u_l) \cdot t < x < x_0 + f'(u_r) \cdot t \\ u_r & x \ge x_0 + f'(u_r) \cdot t\,. \end{cases}$$