Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani SoSe 23
07.07.2023

Klausurberatung Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig und möglicherweise irreführend!

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt nicht!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Absolut notwendige Techniken

- Einfache gewöhnliche DGL lösen, zum Beispiel
  - Separierbare (vgl. z. B. Charakteristiken Methode)
  - Lineare mit konstanten Koeffizienten (vgl. z. B. Wärmeleitungsgleichung)

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = p_n(t) \cdot e^{\mu t}, \qquad p_n \text{ Polynom n-ten Gerades}$$

$y_h(t) = \gamma e^{-\alpha t}$

Ansatz: $y_p(t) = \gamma(t) e^{\alpha t}$ oder,
vorausgesetzt $-\alpha \neq \mu$: $y_p(t) = (d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \ldots + d_n t^n) \cdot e^{\mu t}$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

γ über Anfangswert bestimmen!

- Ganz einfache Integrale, partielle Integration

  Zum Beispiel für d'Alembert, Fourierkoeffizienten, Charakteristiken

- Fourier-Koeffizienten berechnen (Blätter 5, 6, 7)

- polar $<--->$ kartesisch (Blatt 4P)

- Determinante/Eigenwerte von 2x2 Matrizen (Blatt 4P, 4H)

Blatt 1:

P1: Lösungen Eigenwertaufgabe $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(L) = 0$

P2: Gerade/Ungerade Fortsetzung von Funktionen, Fourier-Reihen

H1: Leibnizregel für die Ableitung von Integralen

H2: Fourier-Reihen

Blatt 2:

P1, P2, H1: Charakteristiken-Methode Standard, AWA:

$$u_t + a(x,t,u)u_x = b(x,t,u)$$

P3: Erste nichtlineare Dgl , Fragen zu Charakteristiken:
Form der Charakteristik/ Lösung konstant entlan Charakteristiken?

H2: Verkehrsmodel, Kontinuitätsgleichung, Transportgleichung $u_t - cu_x = 0$

Blatt 3:

P1: Burgers Gleichung: zwei Verdünnungswellen bzw. zwei Stoßwellen

P2: Stoßwelle/Verdünnungswelle für Erhaltungsgleichung:

$$u_t + \left(\frac{(u-2)^4}{2}\right)_x = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x)$$

Form der Charakteristiken, Sprungbedingung, Entropielösung

P3) Kür Aufgabe: Irreversibilität:

Zur bestimmten Zeit gleiche Lösung für verschiedene Anfangsdaten
(stkw. linear/Treppenfunktion)

H1) Begriffe: Schwache Lösung, Entropielösung, Sprungbedingung
für andere Flussfunktionen, hier $f(u) = u^3$

H2) Burgers Gleichung: Verdünnungswelle trifft Stoßwelle.

H3) Verkehrsmodell, nicht konvexe Flussfunktion.

H3a) Kontinuitätsgleichung aufstellen

H3b) Sind die Charakteristiken Geraden?

H3c) Charakteristiken skizzieren

H3d) Entropiebedingung: $f'(u_l) > \dot{s}(t) > f'(u_r)$

Blatt 4: Differentialgleichungen zweiter Ordnung

P1) Nur Hauptteil: $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} = 0.$

1a-b)

Matrix-Schreibweise $\nabla^T A \nabla\, u = 0$
Diagonalform $\lambda_1 u_{\eta\eta} + \lambda_2 u_{\tau\tau} = 0$
Typ: parabolisch, elliptisch, hyperbolisch

c) Zusammenhang alte/neue Koordinaten (EV'n von A ...)

P2) Eigenschaften harmonische Funktionen

b-d) Mittelwertsatz, Min-/Max-Prinzip/Eindeutigkeit
a) Poissonsche Integraldarstellung der Lösung

H1a) Typ bestimmen (parabolisch, elliptisch, hyperbolisch), auch $x, y-$abgängig

H2) Transformation mit Hilfe einer gegebenen Substitution.

Entstandene Differentialgleichung $v(\alpha, \mu)_{\alpha\mu} = 0$ integrieren

Blatt 5:

P1) Laplace Gleichung in Kreisscheibe: Produktansatz.
$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung
$\longrightarrow$ Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

P2) a-b) Laplacegleichung auf Rechteck (auf drei Rändern Null)
P2) c) Superposition.

H1a) Laplace Gleichung polar herleiten.
H1b) Rotationssymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung auf Ring.

H2) Laplace Gleichung auf Rechteck mit Berechnung Fourier-Koeffizienten

Blatt 6:

P) ARWA: Inhomogene Wärmeleitung, inhomogene Randwerte

$A)$ Homogenisieren der Randdaten
$\longrightarrow$ inhomogene DGL, Anfangsdaten $\not\equiv 0$

$\rightarrow B)$ Problem 1: homogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz
geschlossene Lösungsdarstellung
Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

$\rightarrow C)$ Problem 2) inhomogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz
geschlossene Lösungsdarstellung
System gewöhnlicher Differentialgleichung
Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

$\rightarrow D)$ Lösung der ursprünglichen Aufgabe zusammensetzen

H1) ARWA Wärmeleitung, alte Klausuraufgabe (Prof. Behrens)

a) Homogenisieren der Randdaten
$\longrightarrow$ homogene DGL, Anfangsdaten $\not\equiv 0$

b) Homogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz
geschlossene Lösungsdarstellung
Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

H2) Wärmeleitungsgleichung,
Herleitung Lösungsansatz für Neumann-Randbedingungen
Beispiel mit Berechnung der Fourier-Koeffizienten lösen.

Blatt 7:

P1) ARWA Wellengleichung, inhomogene Randdaten,

a) Homogenisieren der Randdaten
b) homogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz
geschlossene Lösungsdarstellung
Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

P2) AWA Wellengleichung, inhomogene Dgl.

a) Formel für Lösung der inhomogenen Dgl. mit Null-Randdaten beweisen

b) Homogene Differentialgleichung: d'Alembert,
inhomogene Differentialgleichungmit Formel aus a)
Zusammensetzen.

H1)ARWA: Inhomogene Wellengleichung, homogene Randwerte
$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung
$\longrightarrow$ System linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung
$\longrightarrow$ Daten aus Koeffizientenvergleich mit Fourier-Reihen
$\longrightarrow$ aber ODEs zu lösen.

H2) Telegraphengleichung

In der Klausur: direkt die in Vorlesung/HÜ erarbeiteten Lösungsformeln verwenden!

Zusammenstellung einiger (nicht aller) geschlossener Lösungsformeln für **Differentialgleichungen zweiter Ordnung** unter:

Formeln

`https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/23/uebu`
`formelsammlung_d2_23.pdf`

(ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

Zusammenstellung einiger (nicht aller) Formeln für Differentialgleichungen erster Ordnung:

Charakteristikenmethode

$$u_t(x,t) + a(x,t,u)\, u_x(x,t) = b(x,t,u)\,.$$

Hilfsproblem :

$$U_t + a \cdot U_x + b \cdot U_u = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} = b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = b(x,t,u). \qquad (2)$$

Lösen/Integrieren liefert $C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)$

Setze $C_2 = f(C_1)$

und besimme f mit Hilfe der Anfangsbedingung, löse wenn möglich auf nach u.

Burgers und ähnliche Gleichungen, Verdünnungs- und Stoßwellen

$$u_t + (f(u))_x = 0\,.$$

$$\frac{dx}{dt} = f'(u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = 0. \tag{3}$$

Charakteristikensteigung hängt nur von u ab

u ist konstant auf Charakteristik

Charakteristiken sind Geraden.

Oft sind Skizzen hilfreich

Für (Riemann Problem)

$$u_t + (f(u))_x = 0, (f \text{ streng konvex}), \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_l & x \le x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases}$$

Entropielösung: $f'(u_l) > \dot{s}(t) > f'(u_r)$

- Im Fall $f'(u_l) > f'(u_r)$: Stoßfront (Unstetigkeitskurve) $s(t)$ mit:

  Rankine- Hugoniot- Sprungbedingung:

$$\boxed{\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} =: \frac{[f]}{[u]}}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \le s(t), \\ u_r & x > s(t)\,. \end{cases}$$

- Im Fall $u_l < u_r$: Verdünnungswelle. Mit $g = (f')^{-1}$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \le x_0 + f'(u_l) \cdot t, \\ g\left(\dfrac{x - x_0}{t}\right) & x_0 + f'(u_l) \cdot t < x < x_0 + f'(u_r) \cdot t \\ u_r & x \ge x_0 + f'(u_r) \cdot t\,. \end{cases}$$