**Fachbereich Mathematik** **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens

# Klausur Differentialgleichungen II

**05. September 2023**

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Name:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Vorname:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Matr.-Nr.:** | | | | | | | | | | | | | | | | |

| **Studiengang:** | AIW | CI | ET | GES/ES | IIW/IN | MB | MTB/MEC | SB | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

| **Aufg.** | **Punkte** | **Korrekteur** |
|---|---|---|
| **1** | | |
| **2** | | |
| **3** | | |
| **4** | | |

$\sum =$

**Aufgabe 1: [5 Punkte]**

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t \,-\, 4t^3\, u_x \;&=\; e^{-t}\,, \qquad && x\in\mathbb{R},\, t\in\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) \;&=\; 1+\sin(2x) && x\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

**Lösung:** Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

$\frac{dx}{dt} \;=\; -4t^3 \implies dx \;=\; -4t^3dt \implies x = -t^4 + C_1$ **[1 Punkt]**

$\frac{du}{dt} \;=\; e^{-t} \implies du \;=\; e^{-t}dt \implies u \;=\; -e^{-t} + C_2\,.$ **[1 Punkt]**

Mit $C_1 = x + t^4$ und $C_2 = u + e^{-t}$

machen wir den Ansatz

$C_2 = f(C_1)$

und erhalten

$u + e^{-t} \;=\; f(x+t^4)$

und damit die allgemeine Lösung: $u(x,t) \;=\; f(x+t^4) - e^{-t}$. **[1 Punkt]**

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) \;=\; f(x+2\cdot 0^2) - e^{-0} \;=\; f(x) - 1 \overset{!}{=} 1 + \sin(2x)\,.$

Also $f(x) = 2 + \sin(2x)$ und

$u(x,t) \;=\; 2 + \sin(2x + 2t^4) - e^{-t}.$ **[2 Punkte]**

**Aufgabe 2: [4= 2+2 Punkte]**

a) Die Funktionen

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq 1+t \\ 2 & x > 1+t \end{cases} \qquad \text{und} \qquad u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{t} & 1 < x < 2t+1 \\ 2 & 2t+1 \leq x \end{cases}$$

sind beide schwache Lösungen der Anfangswertaufgabe

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+.$$

Entscheiden Sie mit Begründung welche der beiden schwachen Lösungen die Entropielösung ist.

b) Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$v_t + \left(\frac{v^2}{2}\right)_x = v_t + v \cdot v_x = 0, \qquad v(x,0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ -2 & x > 0. \end{cases}$$

Entscheiden Sie mit Begründung welche der folgenden Funktionen $v_1$ bzw. $v_2$

$$v_1(x,t) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ -2 & x > 0 \end{cases} \qquad v_2(x,t) = \begin{cases} 2 & x \leq 2t, \\ -2 & x > 2t \end{cases}$$

die Entropielösung der Anfangswertaufgabe ist.

**Lösung:**

a) Hier steigen die Anfangsdaten und $f$ ist konvex. Es gilt

$f'(u_l) = u_l = 0 \,<\, 2 = u_r = f'(u_r)$.

Die Stoßfront einer Entropiebedingung müsste die Entropiebedingung erfüllen:

$f'(u_l) = u_l \,>\, \dot{s}(t) \,>\, u_r = f'(u_r)$.

$u_1$ ist keine Entropielösung. $u_2$ ist die Entropielösung (Standard Verdünnungswelle).

b) Die Anfangsdaten fallen, also wird eine Stoßwelle eingeführt. Die Sprungbedingung lautet

$\dot{s}(t) = \dfrac{v_l + v_r}{2} = \dfrac{2-2}{2} = 0.$

Somit its $v_1$ die Entropielösung.

**Aufgabe 3: [1+1+2 Punkte]**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$4u_{xx} - 2u_{xt} + 4u_{tt} \;=\; 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung in Matrix-Schreibweise um.

b) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).

c) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform $\alpha \cdot \tilde{u}_{\eta\eta} + \beta \cdot \tilde{u}_{\tau\tau} = 0$.

**Lösung:**

$$4u_{xx} + 2 \cdot (-1)u_{xt} + 4u_{tt} \;=\; 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0\,.$$

a) Mit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ lautet die Matrixschreibweise

$\nabla^T \cdot A \cdot \nabla\, u = 0.$ **(1 Punkt)**

b) Aus $4 \cdot 4 - (-1)^2 > 0$ bzw. $\det(A) = 16 - 1 > 0$ folgt, dass die Differentialgleichung elliptisch ist. **(1 Punkt)**

c) Eigenwerte von $A$:

$(4-\lambda)(4-\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow (4-\lambda)^2 = 1 \Longrightarrow 4 - \lambda = \pm 1.$

Wir erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 3\,, \lambda_2 = 5$ **(1 Punkt)**

un damit die Diagonalform

$$3\tilde{u}_{\eta\eta} + 5\tilde{u}_{\tau\tau} = 0. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

**Aufgabe 4: [6+1 Punkte]**

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 9u_{xx} &= \left(\frac{x}{2} - 1\right)\sin(t) && \text{für } x \in (0,2), t > 0, \\ u(x,0) &= \frac{x}{4} && \text{für } x \in [0,2], \\ u_t(x,0) &= 1 - \frac{x}{2} && \text{für } x \in [0,2], \\ u(0,t) &= \sin(t), \quad u(2,t) = \frac{1}{2} && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten für eine Funktion $v(x,t)$.

Geben Sie die neue Anfangsrandwertaufgabe (Differentialgleichung , Anfangsbedingungen und Randbedingungen) an.

b) Geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe aus a) für $v(x,t)$ an.

**Lösung:**

a) Homogenisierung:

$v(x,t) = u(x,t) - \left[\sin(t) + \frac{x}{2}(\frac{1}{2} - \sin(t))\right] = u(x,t) - \frac{x}{4} - \sin(t)(1 - \frac{x}{2})$.

oder

$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{4} + \sin(t)(1 - \frac{x}{2})$. **[1 Punkt]**

Dann gilt:

$u_t = v_t + \cos(t)(1 - \frac{x}{2})$, $u_{tt} = v_{tt} - \sin(t)(1 - \frac{x}{2})$, $v_{xx} = u_{xx}$ **[1 Punkt]**

Neue DGL: $v_{tt} - sin(t)(1 - \frac{x}{2}) - 9v_{xx} = \left(\frac{x}{2} - 1\right)\sin(t) \Longleftrightarrow$

$\boxed{v_{tt} - 9v_{xx} = 0.}$ **[1 Punkt]**

Anfangswerte:

$v(x,0) = u(x,0) - \left[\sin(0) + \frac{x}{2}(\frac{1}{2} - \sin(0))\right] = \frac{x}{4} - \frac{x}{4} = 0.$

$\boxed{v(x,0) = 0}$ **[1 Punkt]**

$v_t(x,0) = u_t(x,0) - \cos(0)(1 - \frac{x}{2}) = 1 - \frac{x}{2} - (1 - \frac{x}{2}) = 0.$

$\boxed{v_t(x,0) = 0}$ **[1 Punkt]**

$v(0,t) = u(0,t) - \left[\sin(t) + \frac{0}{2}(\frac{1}{2} - \sin(t))\right] = \sin(t) - \sin(t) = 0.$

$v(2,t) = u(2,t) - \left[\sin(t) + \frac{2}{2}(\frac{1}{2} - \sin(t))\right] = \frac{1}{2} - \sin(t) - \frac{1}{2} + \sin(t) = 0.$

Randwerte: $\boxed{v(0,t) = v(2,t) = 0}$ **[1 Punkt]**

b) Da alle rechte Seiten der Anfangsrandwertaufgabe für $v$ gleich Null sind, löst $v(x,t) \equiv 0$ die Aufgabe. [**1 Punkt**]