

Klausur Differentialgleichungen II

05. September 2023

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES/ES	IIW/IN	MB	MTB/MEC	SB	
-----	----	----	--------	--------	----	---------	----	--

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

--

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\Sigma =$

Aufgabe 1: [5 Punkte]

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$:

$$\begin{aligned}u_t - 4t^3 u_x &= e^{-t}, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= 1 + \sin(2x) & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2: [4= 2+2 Punkte]

a) Die Funktionen

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 + t \\ 2 & x > 1 + t \end{cases} \quad \text{und} \quad u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{t} & 1 < x < 2t + 1 \\ 2 & 2t + 1 \leq x \end{cases}$$

sind beide schwache Lösungen der Anfangswertaufgabe

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = u_t + u \cdot u_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+.$$

Entscheiden Sie mit Begründung welche der beiden schwachen Lösungen die Entropielösung ist.

b) Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$v_t + \left(\frac{v^2}{2}\right)_x = v_t + v \cdot v_x = 0, \quad v(x, 0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ -2 & x > 0. \end{cases}$$

Entscheiden Sie mit Begründung welche der folgenden Funktionen v_1 bzw. v_2

$$v_1(x, t) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ -2 & x > 0 \end{cases} \quad v_2(x, t) = \begin{cases} 2 & x \leq 2t, \\ -2 & x > 2t \end{cases}$$

die Entropielösung der Anfangswertaufgabe ist.

Aufgabe 3: [1+1+2 Punkte]

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$4u_{xx} - 2u_{xt} + 4u_{tt} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

- a) Schreiben Sie die Differentialgleichung in Matrix-Schreibweise um.
- b) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).
- c) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform $\alpha \cdot \tilde{u}_{\eta\eta} + \beta \cdot \tilde{u}_{\tau\tau} = 0$.

Aufgabe 4: [6+1 Punkte]

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}u_{tt} - 9u_{xx} &= \left(\frac{x}{2} - 1\right) \sin(t) && \text{für } x \in (0, 2), t > 0, \\u(x, 0) &= \frac{x}{4} && \text{für } x \in [0, 2], \\u_t(x, 0) &= 1 - \frac{x}{2} && \text{für } x \in [0, 2], \\u(0, t) &= \sin(t), \quad u(2, t) = \frac{1}{2} && \text{für } t > 0.\end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten für eine Funktion $v(x, t)$. Geben Sie die neue Anfangsrandwertaufgabe (Differentialgleichung, Anfangsbedingungen und Randbedingungen) an.

b) Geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe aus a) für $v(x, t)$ an.

