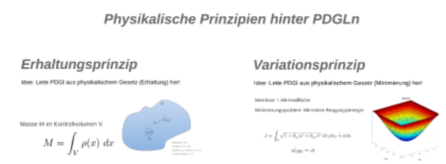
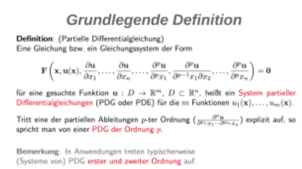
Differentialgleichungen II

Zusammenfassung

1. Einführung





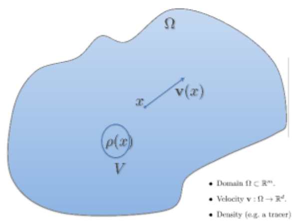
Physikalische Prinzipien hinter PDGLn

Erhaltungsprinzip

Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Erhaltung) her!

Masse M im Kontrollvolumen V

$$M = \int_V \rho(x)\ dx$$



- Domain $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.
- Velocity $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$.
- Density (e.g. a tracer) $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$.
- Control Volume $V \subset \Omega$.

Variationsprinzip

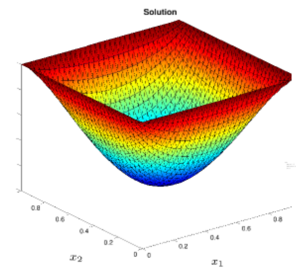
Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Minimierung) her!

Membran = Minimalfläche

Minimierungsproblem: Minimiere Beugungsenergie

$$J = \int_\Omega \sqrt{1 + \partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2}\ dx_1 dx_2 \overset{!}{=} \min$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi$$



Grundlegende Definition

Definition: (Partielle Differentialgleichung)
Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_1}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p-1} x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_n}\right) = \mathbf{0}$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt ein System partieller Differentialgleichungen (PDG oder PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p-ter Ordnung ($\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p_1} x_1 \cdots \partial^{p_n} x_n}$) explizit auf, so spricht man von einer PDG der Ordnung p.

Bemerkung: In Anwendungen treten typischerweise (Systeme von) PDG erster und zweiter Ordnung auf.

Kontinuitätsgleichung

Kontinuitätsgleichung:

- Sei nun $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe (z.B. Fluiddichte).
- Es gelte ein Erhaltungsprinzip der Form

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x} = 0.$$

- Nach Reynoldschem Transportsatz gilt dann:

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})\right](\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x} = 0.$$

- Da $D_t \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge, gilt die PDG (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Flussfunktion:

- Schreibe die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe einer Flussfunktion $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- Wir vermeiden *zwei* unbekannte Größen ρ und $\mathbf{q}$ in *einer* Gleichung durch

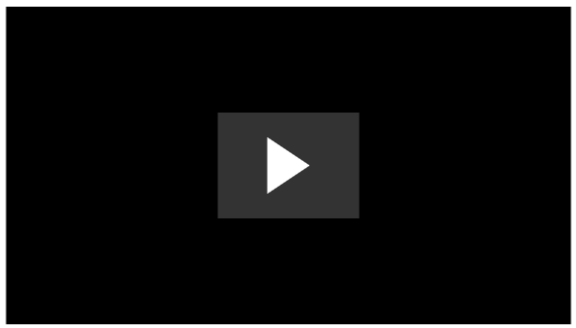
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\rho(\mathbf{x}, t), \nabla\rho(\mathbf{x}, t), \ldots).$$

- Beispiel: Der Fluss $\mathbf{q}$ ist proportional zur Dichte ρ, also

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

- Dann erhalten wir die (Transportgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla\rho(\mathbf{x}, t) = 0.$$



Kontinuitätsgleichung:

- Sei nun $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe (z.B. Fluiddichte).
- Es gelte ein Erhaltungsprinzip der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x} = 0.$$

- Nach Reynoldschem Transportsatz gilt dann:

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x} = 0.$$

- Da $D_t \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge, gilt die PDG (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Flussfunktion:

- Schreibe die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe einer Flussfunktion $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- Wir vermeiden *zwei* unbekannte Größen ρ und $\mathbf{q}$ in *einer* Gleichung durch

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\rho(\mathbf{x}, t), \nabla\rho(\mathbf{x}, t), \ldots).$$

- Beispiel: Der Fluss $\mathbf{q}$ ist proportional zur Dichte ρ, also

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

- Dann erhalten wir die (Transportgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla\rho(\mathbf{x}, t) = 0.$$

2. Charakteristiken-Methode

Definition: Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel: Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$x u_x + y u_y + (x^2 + y^2) u_z = 0$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t \\ y(t) &= c_2 e^t \\ z(t) &= \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2) e^{2t} + c_3 \end{aligned}$$

Definition: Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy–Problem**.

Definition: Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel: Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t \\ y(t) &= c_2 e^t \\ z(t) &= \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3 \end{aligned}$$

Definition: Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Anfangswertproblem

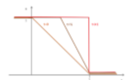
$$\begin{cases} u_t + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy–Problem**.

3. Erhaltungs-gleichungen

Beispiel: (Burgers Gleichung)
Die Burgers Gleichung ist gegeben durch die Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$, bzw. durch das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$



- Die Lösung ist gegeben durch $u(t) = x_0 + tu_0(x_0)$.
- Falls u_0 gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \le 0 \\ 1-x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \ge 1 \end{cases}$$

  dann entwickelt $x(t)$ für $t \to 1$ eine Singularität.
- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert nur lokal für $0 \le t < 1$.
- Die lokale Lösung lautet für $t \in [0,1[$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < 1 \\ \frac{(1-x)}{(1-t)} & : \quad 0 \le t \le x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

Definition: (schwache Lösung)
Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty[)$ heißt Integrallösung oder schwache Lösung der Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, falls für alle Testfunktionen v gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x)\, dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x,0)\, dx = 0.$$

Definition: (Stoßwellenlösung)
Eine Stoßwellenlösung u ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung Das Anfangswertproblem

$$u_t + f(u)_x = 0$$

wenn eine Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, so dass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PGD ist und u bei $x = s(t)$ ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+,t) - u(s(t)^-,t) = u_r - u_l$$

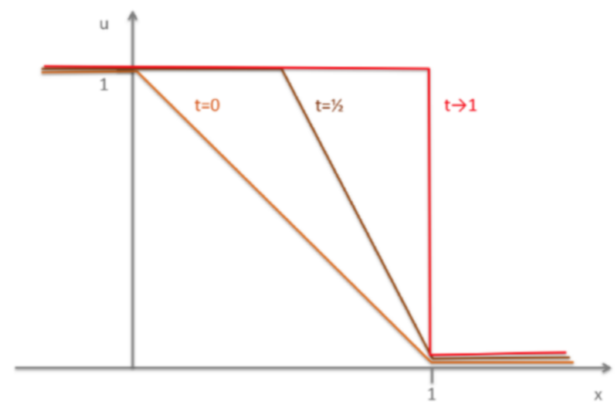
besitzt. $\dot{s}(t)$ heißt Stoßgeschwindigkeit.

Satz: (Rankine-Hugoniot Bedingung)
Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}(t)$ die Rankine-Hugoniot Bedingung

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-,t)) - f(u(s(t)^+,t))}{u(s(t)^-,t) - u(s(t)^+,t)} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Beispiel: (Burgers Gleichung)
Die Burgers Gleichung ist gegeben durch die Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$, bzw. durch das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} u_t + uu_x = & \quad 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u = & \quad u_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$



- Die Lösung ist gegeben durch $u(t) = x_0 + tu_0(x_0)$.
- Falls u_0 gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0 \\ 1-x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

dann entwickelt $x(t)$ für $t \to 1$ eine Singularität.

- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert nur lokal für $0 \leq t < 1$.
- Die lokale Lösung lautet für $t \in [0,1[$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < 1 \\ \frac{(1-x)}{(1-t)} & : \quad 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

Definition: (schwache Lösung)
Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$ heißt Integrallösung oder schwache Lösung der Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, falls für alle Testfunktionen v gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x)\ dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x,0)\ dx = 0.$$

Definition: (Stoßwellenlösung)
Eine Stoßwellenlösung u ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung Das Anfangswertproblem

$$u_t + f(u)_x = 0$$

wenn eine Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, so dass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PGD ist und u bei $x = s(t)$ ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t) = u_r - u_l$$

besitzt. $\dot{s}(t)$ heißt Stoßgeschwindigkeit.

Satz: (Rankine-Hugoniot Bedingung)
Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}(t)$ die Rankine-Hugoniot Bedingung

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t))}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

4. Entropie-Bedingung

Satz: (Verdünnungswelle)
Sei das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ und $u(x, t = 0) = x_0$ gegeben. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{mit } u_l < u_r.$$

Dann ist die Verdünnungswelle gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x < f'(u_l)t \\ g(\frac{x}{t}) & : \quad f'(u_l)t \leq x \leq f'(u_r)t \\ u_r & : \quad x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemann Problems.

Definition: (Entropiebedingung)
Eine Integrallösung heißt Entropielösung, falls die Lösung die folgende Entropiebedingung oder Lax-Oleinik-Bedingung erfüllt:
Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt:

$$u(t, x+z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z.$$

Satz: (Verdünnungswelle)
Sei das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ und $u(x,t=0) = x_0$ gegeben. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{mit } u_l < u_r.$$

Dann ist die Verdünnungswelle gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x < f'(u_l)t \\ g(\frac{x}{t}) & : \quad f'(u_l)t \leq x \leq f'(u_r)t \\ u_r & : \quad x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemann Problems.

Definition: (Entropiebedingung)
Eine Integrallösung heißt Entropielösung, falls die Lösung die folgende Entropiebedingung oder Lax-Oleinik-Bedingung erfüllt:
Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt:

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z.$$

5. PDGLn zweiter Ordnung

Definition: (PDG 2. Ordnung)
Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.

Definition: (Korrekt gestelltes Problem)
Ein korrekt gestelltes Problem (auch wohlgestelltes Problem) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten *partiellen Differentialgleichung*, und
- einem Satz von *Anfangs- und/oder Randbedingungen*,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Existenz: Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig;
3. Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A.

1. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und haben alle λ_i gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung elliptisch.
2. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n-1$ Eigenwerte, so heißt die Gleichung hyperbolisch.
3. Gilt $\lambda_k = 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so heißt die Gleichung parabolisch.

1. Die elliptische Laplace-Gleichung
$$\Delta u = 0.$$
2. Die hyperbolische Wellen-Gleichung
$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$
3. Die parabolische Wärmeleitungs-Gleichung
$$u_t = \Delta u.$$

ng)

$(n = 1)$
$(n \geq 3)$

Definition: (PDG 2. Ordnung)
Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + f u = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A.

1. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und haben alle λ_i gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung elliptisch.

2. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n - 1$ Eigenwerte, so heißt die Gleichung hyperbolisch.

3. Gilt $\lambda_k = 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so heißt die Gleichung parabolisch.

1. Die elliptische Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0.$$

2. Die hyperbolische Wellen-Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

3. Die parabolische Wärmeleitungs-Gleichung

$$u_t = \Delta u.$$

Definition: (Korrekt gestelltes Problem)
Ein korrekt gestelltes Problem (auch wohlgestelltes Problem) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten *partiellen Differentialgleichung*, und
- einem Satz von *Anfangs- und/oder Randbedingungen*,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Existenz: Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig;
3. Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab

6. Laplace-Gleichung

Definition: (Laplace- und Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine zweimal stetig diff'bare Funktion, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u = u(\mathbf{x})$. Dann ist die Laplace-Gleichung gegeben durch

$$\Delta u = 0.$$

Die Poisson-Gleichung ist gegeben durch

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechter Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition: (Greensche Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= \quad \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Definition: (Fundamentallösung der Laplace-Gleichung)
Die Funktion $\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, definiert durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log\|x\| & (n=1) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Satz: (Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt für jede Kugel $B(\mathbf{x},r) \subset U$

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \, dS = \fint_{B(\mathbf{x},r)} u \, d\mathbf{y}.$$

Satz: (Eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe)
Sei $g \in C(\partial U)$ und $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Definition: (Laplace- und Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine zweimal stetig diff'bare Funktion, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u = u(\mathbf{x})$. Dann ist die Laplace-Gleichung gegeben durch

$$\Delta u = 0.$$

Die Poisson-Gleichung ist gegeben durch

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechter Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition: (Fundamentallösung der Laplace-Gleichung)
Die Funktion $\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, definiert durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 1) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Satz: (Darstellung der Lösung der Poisson-Gleichung)
Eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Satz: (Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$

$$u(\mathbf{x}) = ⨍_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \, dS = ⨍_{B(\mathbf{x},r)} u \, d\mathbf{y}.$$

Satz: (Eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe)
Sei $g \in C(\partial U)$ und $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Definition: (Greensche Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= \quad \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

7. Greensche Funktion

Definition: (Poissonkern)
Die Funktion

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n},$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ heißt Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf} \quad \partial\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\, d\mathbf{y}.$$

Definition: (Poissonkern)
Die Funktion
$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n},$$
mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ heißt Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf} \quad \partial\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \, d\mathbf{y}.$$

8. Wärmeleitungs-gleichung

Definition: (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkungen: (Lösung für das Cauchy-Problem)
Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x},t)$ lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u = g & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$u(\mathbf{x},t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

Satz: (Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung)
Ist $u \in C_1^2(U_t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x},t;r)} \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{(t-s)^2} u(\mathbf{y},s) \, d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(\mathbf{x},t;r) \subset U_t$.

Satz: (Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } U_t \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet U_T mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$.

Das inhomogene Anfangswertproblem mit inhomogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u(\mathbf{x},0) &= g(\mathbf{x}) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s) f(\mathbf{y},s) \, d\mathbf{y} ds.$$

Definition: (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkungen: (Lösung für das Cauchy-Problem)
Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x},t)$ lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u = g & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

Das inhomogene Anfangswertproblem mit inhomogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u(\mathbf{x}, 0) &= g(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \; d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) \; d\mathbf{y} ds.$$

Satz: (Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung)
Ist $u \in C_1^2(U_t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x},t;r)} \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{(t-s)^2} u(\mathbf{y}, s)\ d\mathbf{y}ds$$

für jede Menge $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_t$.

Satz: (Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } U_t \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet U_T mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$.

9. Wellengleichung

Satz: (Formel von d'Alembert)
Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die Formel von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy.$$

Zusammenfassung: (Reflektion des Halbraumes $\mathbb{R}_+$)
Eine Lösung des *Anfangsrandwertproblems*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(-x+t)] + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y)\, dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Bemerkung: (Poissonsche Formel für $n = 2$)
Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[\\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ (Poissonsche Formel):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{\partial B_t(x)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}}\, dy$$

Bemerkung: (Mittelwert über der Sphäre) Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definiere den Mittelwert von $u(x,t)$ über der Sphäre $\partial B_r(x)$ (oder auch $\partial B(x,r)$)

$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, dS(y).$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} G(x;r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\, dS(y) \\ H(x,r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\, dS(y) \end{aligned}$$

Bemerkung: (Kirchhoffsche Formel für $n = 3$)
Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times]0, \infty[\\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ (Kirchhoffsche Formel):

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} (t h(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x))\, dS(y)$$

Satz: (Euler-Poisson-Darboux Gleichung)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Dann löst $U(x;r,t)$ die Euler-Poisson-Darboux Gleichung

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ U = G,\ U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Satz: (Formel von d'Alembert)
Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die Formel von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)\ dy.$$

Zusammenfassung: (Reflektion des Halbraumes $\mathbb{R}_+$)
Eine Lösung des *Anfangsrandwertproblems*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(-x+t)] + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y)\, dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Bemerkung: (Mittelwert über der Sphäre) Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definiere den Mittelwert von $u(x,t)$ über der Sphäre $\partial B_r(x)$ (oder auch $\partial B(x,r)$)

$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, dS(y).$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} G(x;r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\, dS(y) \\ H(x,r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\, dS(y) \end{aligned}$$

Satz: (Euler-Poisson-Darboux Gleichung)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g, \; u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Dann löst $U(x; r, t)$ die Euler-Poisson-Darboux Gleichung

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ U = G, \; U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Bemerkung: (Kirchhoffsche Formel für $n = 3$)
Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times]0, \infty[\\ u = g, \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ (Kirchhoffsche Formel):

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)) \, dS(y)$$

Bemerkung: (Poissonsche Formel für $n = 2$)
Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[\\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ (Poissonsche Formel):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{\partial B_t(x)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}}\, dy$$

10. Fourier-Methode

Bemerkung: (Allgemeine Approximative Lösung der 1D Poisson Gleichung)

- Sei das eindimensionale Randwertproblem gegeben:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -T\frac{d^2u}{dx^2} & = & f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) & = & 0. & \end{array} \right.$$

- Approximiere die rechte Seite $f(x)$ durch eine endliche Fourier-Reihe $f_N(x)$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu $(n = 1, \dots, N)$

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx.$$

- Dann ist eine approximative Lösung des Randwertproblems gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_{tt} - u_{xx} & = & 0 & : \ 0 < x < l, 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) & = & h(x) & : \ 0 \le x \le l \\ u(0,t) & = & u(l,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{array} \right.$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dabei sind b_n die Fourier–Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x,0) = h(x)$.

Erinnerung: (Wärmeleitungsgleichung) Betrachte das Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \ 0 < x < l, \ 0 < t \le T, \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ 0 \le x \le l, \\ u(0,t) & = & u(l,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T. \end{array} \right.$$

Gesucht ist eine Lösung in Form einer Fourier-Reihe:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Periodische Randbedingungen

Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-l, l]$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \ -l < x < l, 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ -l \le x \le l \\ u(-l,t) & = & u(l,t) & : \ 0 \le t \le T \\ u_x(-l,t) & = & u_x(l,t) & : \ 0 \le t \le T \end{array} \right.$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier–Reihen ist damit

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

Bemerkung: (Allgemeine Approximative Lösung der 1D Poisson Gleichung)

- Sei das eindimensionale Randwertproblem gegeben:

$$\begin{cases} -T\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x), \quad 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) &= 0. \end{cases}$$

- Approximiere die rechte Seite $f(x)$ durch eine endliche Fourier-Reihe $f_N(x)$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu $(n = 1, \ldots, N)$

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx.$$

- Dann ist eine approximative Lösung des Randwertproblems gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Erinnerung: (Wärmeleitungsgleichung) Betrachte das Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & : \; 0 < x < l, \; 0 < t \le T, \\ u(x,0) = g(x) & : \; 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & : \; 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Gesucht ist eine Lösung in Form einer Fourier-Reihe:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Periodische Randbedingungen

Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-l, l]$ gegeben durch

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &: -l < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= g(x) &: -l \leq x \leq l \\ u(-l,t) &= u(l,t) &: 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l,t) &= u_x(l,t) &: 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier–Reihen ist damit

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= g(x) & : \ 0 \leq x \leq l \\ u_t(x,0) &= h(x) & : \ 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

ist gegeben durch

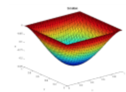
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l} t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dabei sind b_n die Fourier–Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x,0) = h(x)$.

11. Numerische Methoden für Elliptische Gleichung

Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega = [0,1]^2 \in \mathbb{R}^2$$
$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$



Finite Differenzen

Diskretisiere den Differenzialoperator

$$-\Delta = L \approx L_h$$

Finite Volumen

Diskretisiere die Flussform

Finite Elemente

"Diskretisiere Funktionen Raum"

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$
$$\Rightarrow \int_\Omega -\Delta u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$
$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$

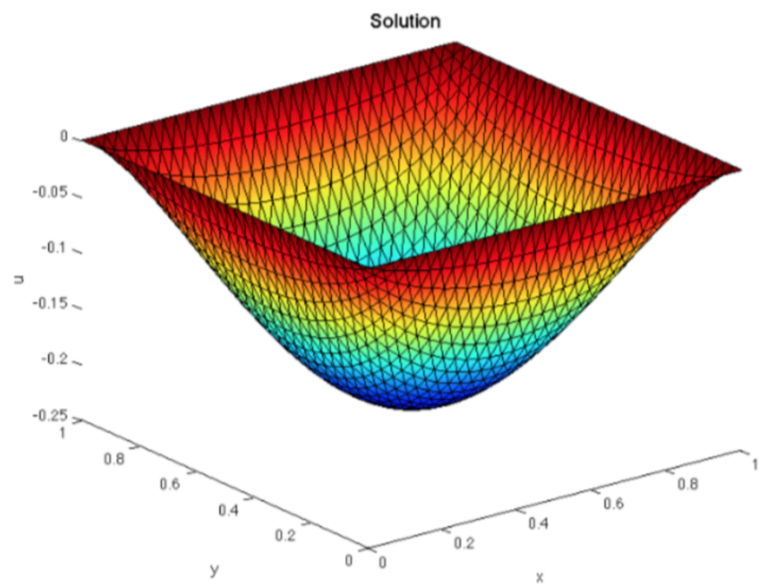
Lineares Gleichungssystem

$$L_h u_h = f_h$$

Fourier-

Modellproblem

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega = [0,1]^2 \in \mathbb{R}^2$$
$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega$$



Finite Differenzen

Diskretisiere den Differenzialoperator

$$-\Delta = L \approx L_h$$

hier: $$\frac{du}{dx} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

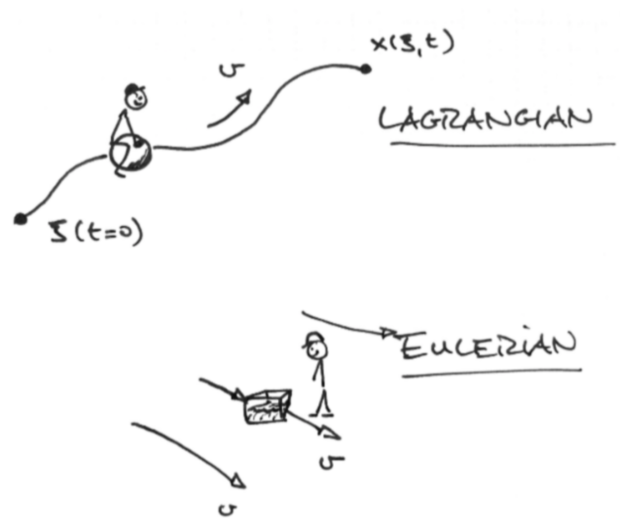
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\Downarrow$$

$$-\Delta u = \frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

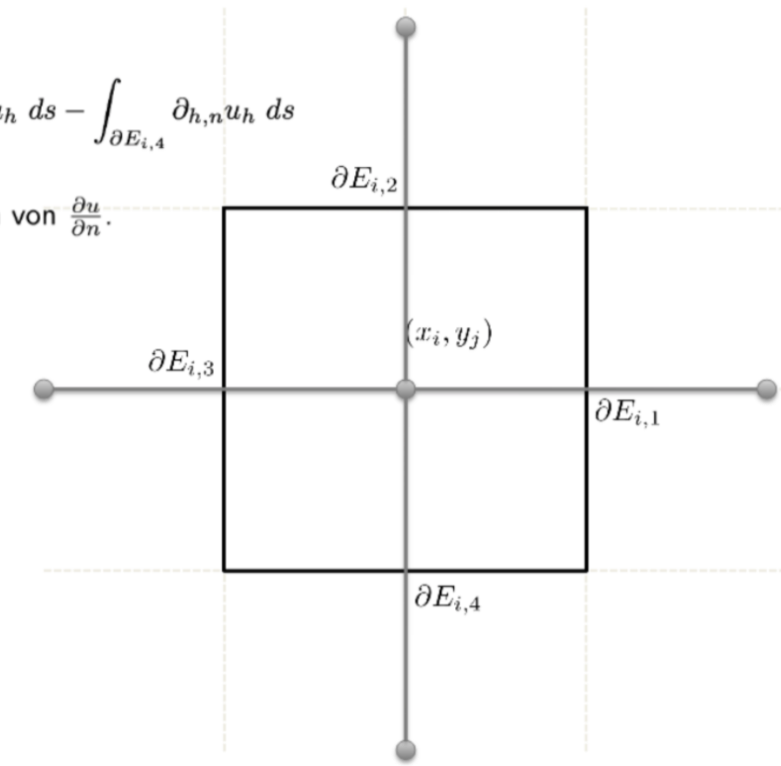
Finite Volumen

Diskretisiere die Flussform



$$\int_{E_i} f \, dx = -\int_{\partial E_i} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$$
$$\approx -\int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \, ds - \int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h \, ds$$

$\partial_{h,n} u_h$: Finite Differenzen Approximation von $\frac{\partial u}{\partial n}$.



$$\int_{\partial E_{i,1}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i+1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,2}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_i, y_{j+1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,3}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_{i-1}, y_j) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

$$\int_{\partial E_{i,4}} \partial_{h,n} u_h \, ds = \Delta x \cdot \left[\frac{u_h(x_i, y_{j-1}) - u_h(x_i, y_j)}{\Delta x} \right]$$

Finite Elemente

"Diskretisiere Funktionen Raum"

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

$$\Rightarrow \int_\Omega -\Delta u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi$$

Nun wird das Variations-Problem $a(u_h, v_h) = f(v_h)$ ersetzt durch

$$u_i \cdot a(\varphi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j), \quad \forall i, j = 1, \ldots, N,$$

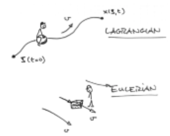
da $u_h = \sum u_i \varphi_i$.

Lineares Gleichungssystem

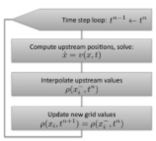
$$L_h u_h = f_h$$

12. Numerische Methoden für Transportgleichung

Lagrangesche Perspektive



Algorithmus

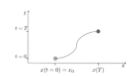


- Position: $x = x(t)$.
- Velocity: $v = v(x,t)$.

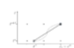
Particle position can be computed by

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x,t)$$

With initial condition $\quad x(t=0) = x_0$



Problem: Passive advection ($s \equiv 0$):



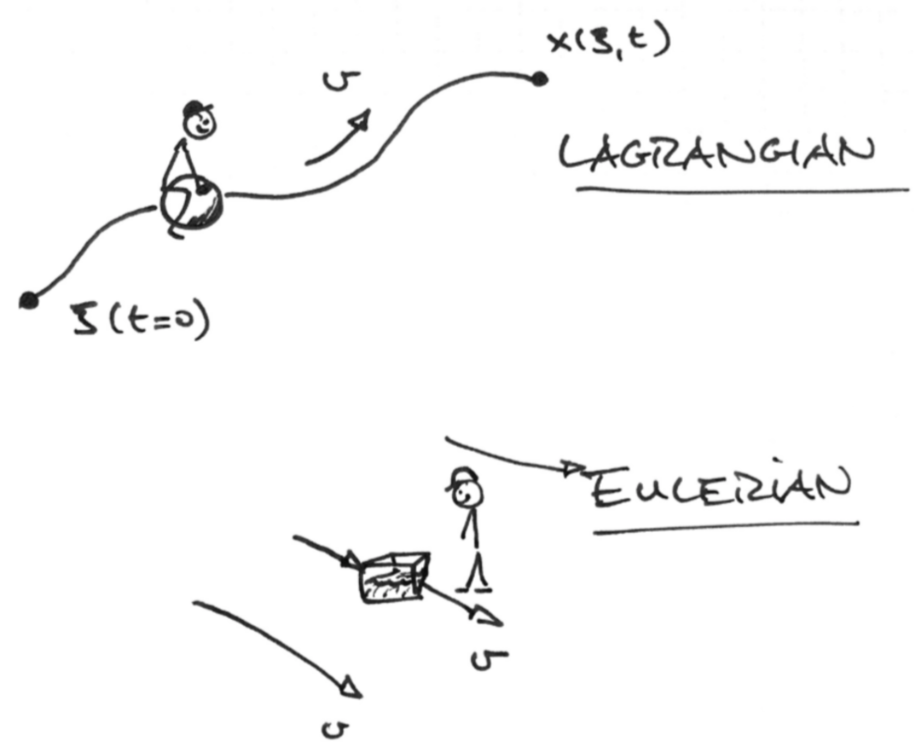
$$\frac{dx}{dt} = v(x,t), \quad x(0) = x_0,$$
$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \rho(x,0) = \rho_0(x).$$

Strategy:

- Solve $\frac{dx}{dt} = v$ by any ODE solver,
- Solve $\frac{d\rho}{dt} = 0$ by finite difference.

$$\frac{d\rho}{dt} \approx \frac{\rho(x_i, t^{n+1} - \rho(x_i^-, t^n)}{\Delta t} = 0$$
$$\Rightarrow \rho^+ = \rho^-.$$

Lagrangesche Perspektive

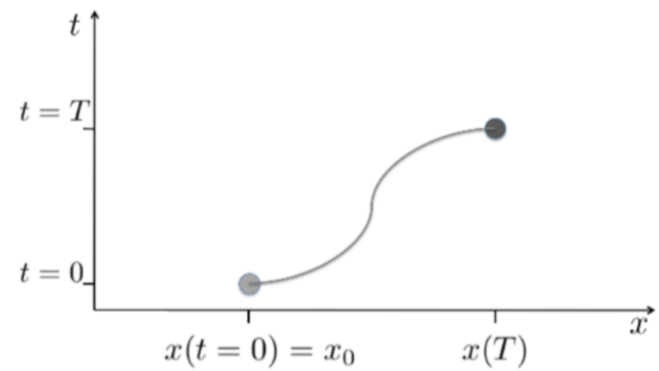


- Position: $x = x(t)$.
- Velocity: $v = v(x, t)$.

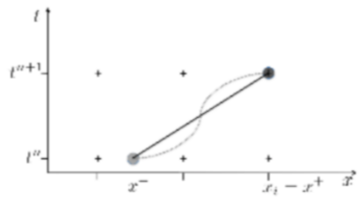
Particle position can be computed by

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

With initial condition $x(t = 0) = x_0$



Problem: Passive advection ($s \equiv 0$):



$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v(x,t), \quad x(0) = x_0, \\
\frac{d\rho}{dt} &= 0, \quad \rho(x,0) = \rho_0(x).
\end{aligned}
$$

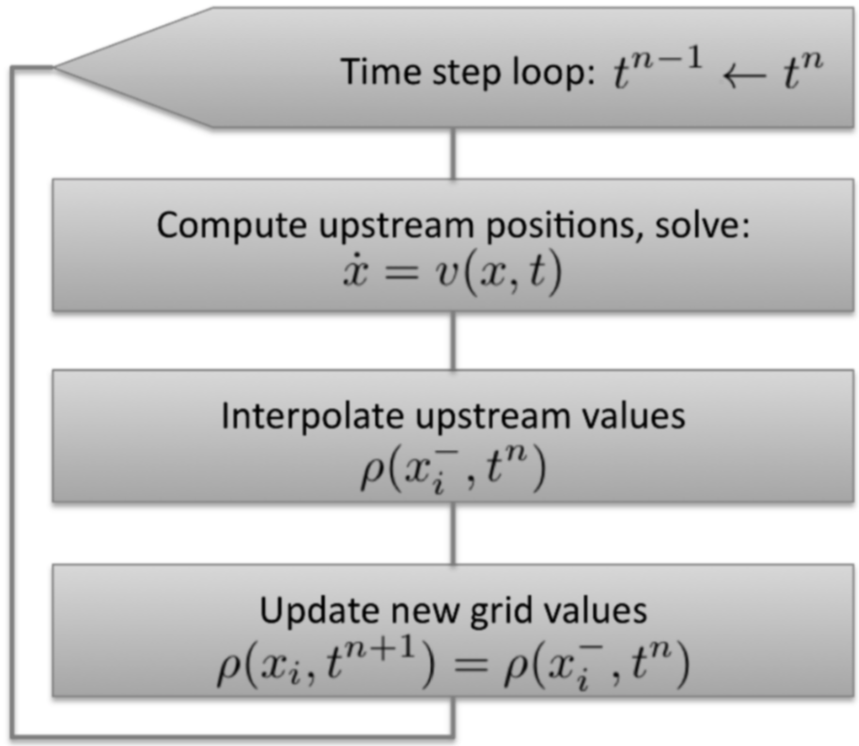
Strategy:

- Solve $\frac{dx}{dt} = v$ by any ODE solver,
- Solve $\frac{d\rho}{dt} = 0$ by finite difference.

$$
\frac{d\rho}{dt} \approx \frac{\rho(x_i, t^{n+1} - \rho(x_i^-, t^n)}{\Delta t} = 0
$$

$$
\Rightarrow \rho^+ = \rho^-.
$$

Algorithmus

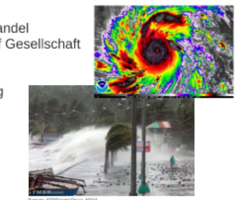


Gesellschaft und Partielle DGLn

Naturkatastrophen sind die Schnittstelle zur Gesellschaft

Gobaler Wandel
Einfluss auf Gesellschaft

Prävention
Vermeidung
Planung



Sources: AFP/Spiegel Online, NOAA

Deterministischer Ansatz

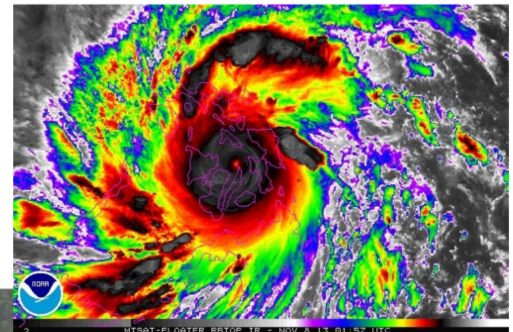
- Verständnis des physikalischen Mechanismus
- Physikalisches Modell für probabilistische Methoden
- Löse Differentialgleichungen!

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\rho) + \nabla(\nu \nabla \rho) = S(\rho)$$

Naturkatastrophen sind die Schnittstelle zur Gesellschaft

Gobaler Wandel
Einfluss auf Gesellschaft

Prävention
Vermeidung
Planung



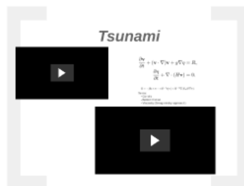
Sources: AFP/Spiegel Online, NOAA

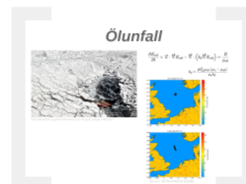
Deterministischer Ansatz

- Verständnis des physikalischen Mechanismus
- Physikalisches Modell für probabilistische Methoden
- Löse Differentialgleichungen!

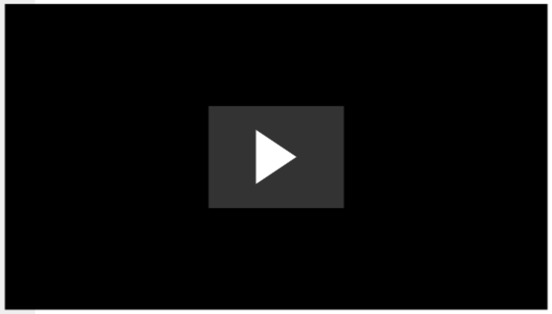
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\rho) + \nabla(\nu \nabla \rho) = S(\rho)$$

Beispiele





Tsunami



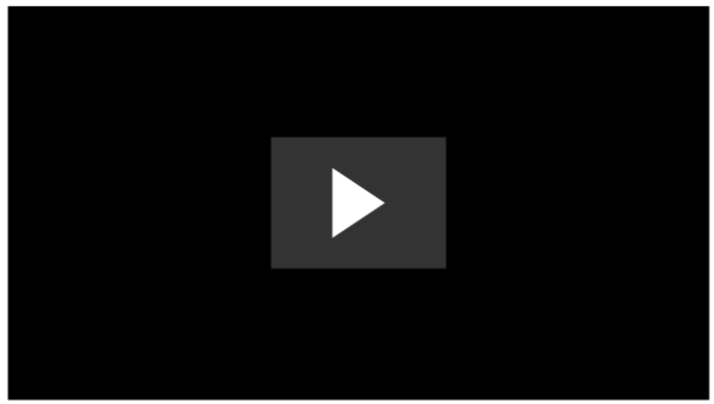
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + g\nabla\eta = R,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (H\mathbf{v}) = 0.$$

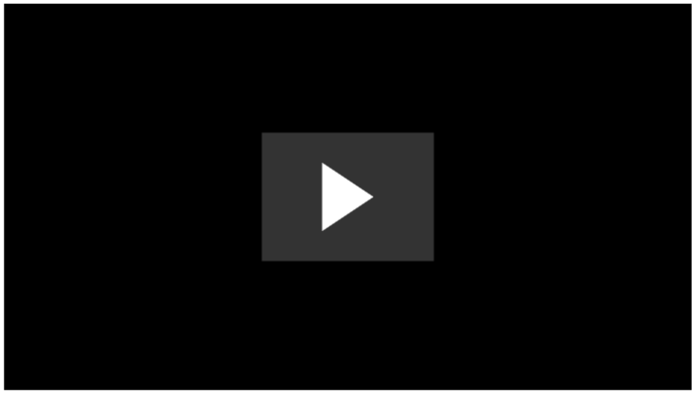
$$R = -f\mathbf{k} \times \mathbf{v} - rH^{-1}\mathbf{v}|\mathbf{v}| + H^{-1}\nabla(K_h H \nabla \mathbf{v})$$

Terms:

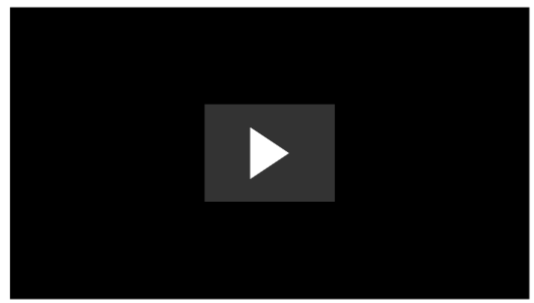
- Coriolis
- Bottom friction
- Viscosity (Smagorinsky approach)



Sturmfluten



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + g\nabla\eta = R,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (H\mathbf{v}) = 0.$$

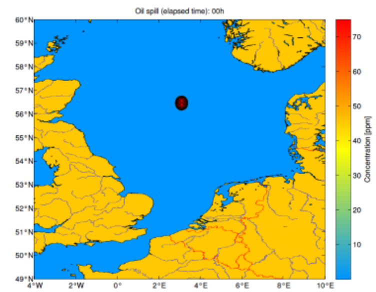


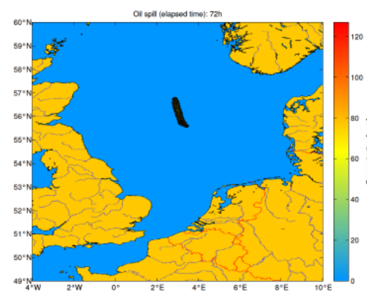
Ölunfall

http://tcktcktck.org/2014/07/wwf-arctic-oil-spill-spread-1000-km/

$$\frac{\partial K_{oil}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} K_{oil} - \vec{\nabla} \cdot \left(k_d \vec{\nabla} K_{oil} \right) = \frac{R}{\rho_{oil}}$$

$$k_d = \frac{g h_{oil}^2 \rho_{oil} \left(\rho_w - \rho_{oil} \right)}{\rho_w k_f}$$



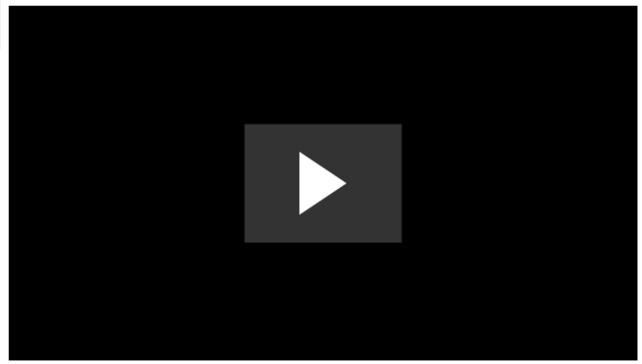


Source: Steffen Reinert (Study)

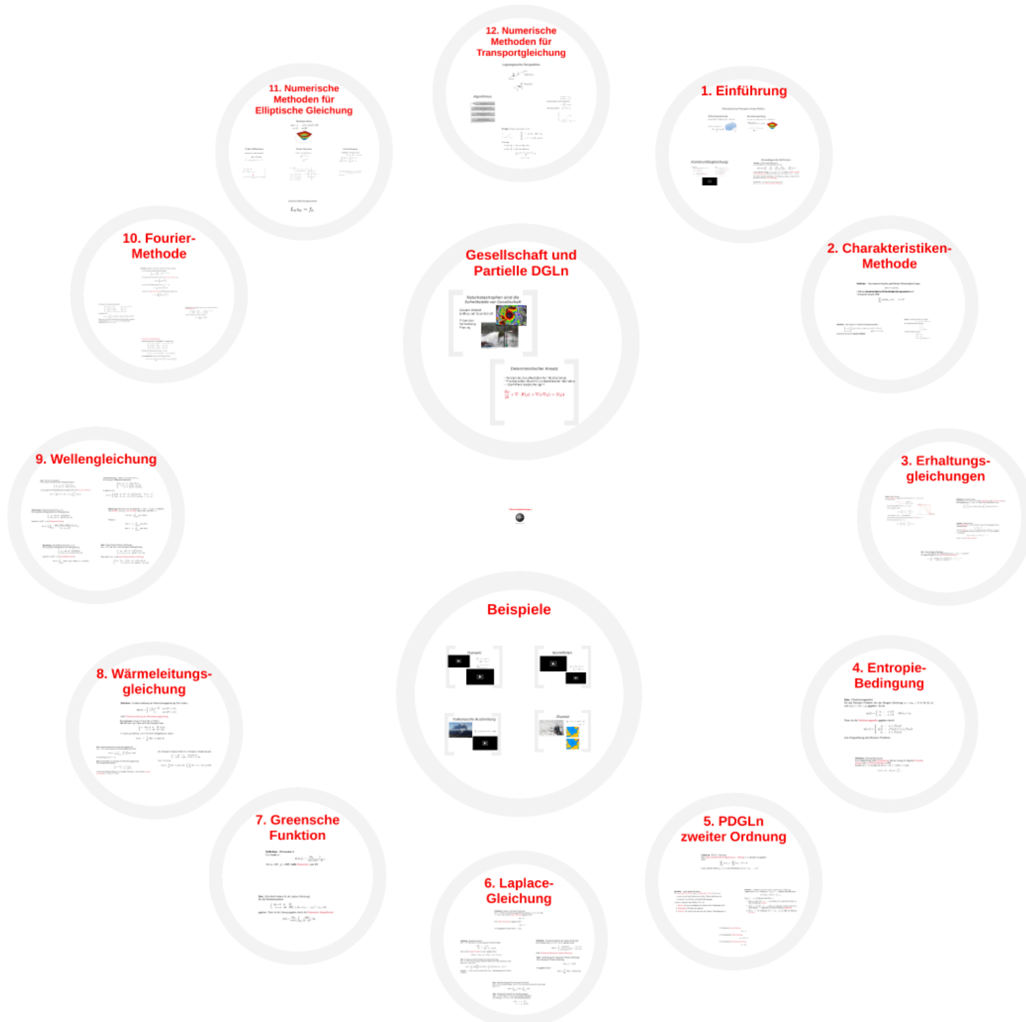
Vulkanasche Ausbreitung

Source: http://blog.pikarl.de/wp-content/uploads/2010/05/Is102139.jpg

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) + \nabla(\nu \nabla \rho) = S(\rho)$$



Source: Elena Gerwing, Matthias Hort, J.B. (MSc Project)



Gesellschaft und Partielle DGLn
Beispiele
1. Einführung
2. Charakteristiken-Methode
3. Erhaltungs-gleichungen
4. Entropie-Bedingung
5. PDGLn zweiter Ordnung
6. Laplace-Gleichung
7. Greensche Funktion
8. Wärmeleitungs-gleichung
9. Wellengleichung
10. Fourier-Methode
11. Numerische Methoden für Elliptische Gleichung
12. Numerische Methoden für Transportgleichung