Differentialgleichungen II

Woche 11-13 / J. Behrens

Modellproblem: Transportgleichung

$$(*) \quad \rho_t + a \cdot \rho_x = 0 \quad , \quad a \in \mathbb{R} \text{ gegeben konst.}$$

$$\rho(x, t=0) = \rho_0(x) \qquad \rho(x,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Bemerkung: Die Lösung von $(*)$ ist gegeben durch

$$\rho(x,t) = \rho_0(x - at)$$

Für numerische Verfahren erhalte num. Lösung $\rho_h(x,t)$

Definition:

Fehler: $e = |\rho - \rho_h|$

Residuum: $r = \left| \frac{\partial \rho_h}{\partial t} + a \frac{\partial \rho_h}{\partial x} \right|$

Bem: i.A. wird $r \neq 0$, nur falls ρ_h die exakte Lösung ist, wird $r = 0$.

Weitere Begriffe:

Konvergenz: $\rho_h \to \rho$ für $h \to 0$

(Konsistenz: "$\rho_t + a\rho_x$" $\to$ "$\rho_{ht} + a\rho_{hx}$") intuitiv

Sei L_h eine diskrete Darstellung des kontinuierlichen Operator L, z.B.

$$L = \Delta \qquad \in \mathbb{R}^2$$

$$L_h = \left[4 \cdot u(x,y) - u(x-h,y) - u(x+h,y) - u(x,y-h) - u(x,y+h)\right] \cdot \frac{1}{h^2}$$

Finite Differenzen-Darstellung des Laplace-Operators.

Dann bedeutet Konsistenz:

$$L_h \to L \quad \text{für } h \to 0$$

<u>Bem:</u> Für die Advektionsgleichung: $L = \left[\frac{\partial}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial}{\partial x}\right]$

$$L_h[f_h] = \frac{f_h(x, t+\tau) - f_h(x)}{\tau} + a \cdot \frac{f_h(x+h, t) - f(x,t)}{h}$$

<u>Zeige</u> Konsistenz von Finite Differenzen-Methoden:

<u>Idee:</u> Taylor-Entwicklung um x:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + R(f, x, h^3 \ldots)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)} + \underbrace{\frac{h}{2} f''(x) + R(f, x, h^2, \ldots)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \mathcal{O}(h) \to 0 \quad \text{für } h \to 0$$

Damit ist jede Finite Differenzen-Methode konsistent.

<u>Bem:</u> Man nennt eine Finite Differenzen Methode, die mit $\mathcal{O}(h)$ konsistent ist konsistent von der Ordnung 1.
und entsprechend falls $\mathcal{O}(h^p)$ gilt, konsistent von der Ordnung p.

Theorem von Lax: Falls ein numerisches Verfahren stabil und konsistent ist, dann konvergiert seine Lösung.

<u>Was heißt Stabilität?</u>

Anschaulich gesprochen: Der diskrete Algorithmus dämpft kleine Störungen (die beispielsweise durch Computer-Zahldarstellung verursacht werden) und verstärkt sie nicht.

Eine Überprüfung der Stabilität erfolgt mittels von Neumann Stabilitätsanalyse.

<u>Idee:</u> Schaue einzelne Fourier-Komponenten an und identifiziere solche, die möglicherweise durch das diskrete Verfahren verstärkt werden.

<u>Beispiel:</u> Diskretisiere die Transportgleichung mit einem FTCS Schema (forward in time, centered in space):

$$\left.\begin{aligned} \rho_t &\approx \frac{\rho(t+\tau)-\rho(t)}{\tau} \\ \rho_x &\approx \frac{\rho(x+h)-\rho(x-h)}{2h} \end{aligned}\right\}$$

verwende Gitterfunktionen $x_i = ih$, $t^j = j\tau$

$$\rightarrow \rho(x_i, t^j) = \rho_i^j$$

$$\rho(x_i+h, j) = \rho_{i+1}^j$$

$$\rightarrow \rho_t + a\rho_x \approx \frac{\rho_i^{t+1}-\rho_i^t}{\tau} + a\,\frac{\rho_{i+1}^t-\rho_{i-1}^t}{2h}$$

$$\rightarrow \underbrace{\rho_i^{t+1}}_{\text{neu}} = \underbrace{\rho_i^t - \frac{\tau a}{2h}\left(\rho_{i+1}^t - \rho_{i-1}^t\right)}_{\text{bekannt aus vorigem Zeitschritt oder aus Anfangsbed.}}$$

Prüfe Stabilität: Ansatz: Teste Fehlerverstärkung mit $v_i(t) = c(t)\, e^{ikx}$

Schreibe $v_i^j = c_j\, e^{iku}$ wobei $u = i$ wovon oben und $i = \sqrt{-1}$

Dann:

$$\rho_u^j \to c_j\, e^{iku h}$$

$$\rho_{u+1}^j \to c_j\, e^{ik(u+1)h}$$

$$\rho_u^j \to c_{j+1}\, e^{iku h}$$

Einsetzen:

$$(**) \quad c_{j+1}\, e^{iku h} = c_j\, e^{iku h} - \frac{\tau a}{2h}\left(c_j\, e^{ik(u+1)h} - c_j\, e^{ik(u-1)h}\right)$$

Frage: wie verändert sich $c_j \to c_{j+1}$?

$$(**) \Rightarrow \underline{c_{j+1}\, e^{iku h}} = c_j\, e^{iku h}\left[1 - \frac{\tau a}{2h}\left(e^{ikh} - e^{-ikh}\right)\right]$$

$$= \underline{c_j\, e^{iku h}}\left[1 - \frac{\tau a}{h}\, i \sin(kh)\right]$$

Prüfe ob $\left[1 - \frac{\tau a}{h}\, i \sin(kh)\right] =: \xi$ verstärkt.

$$|\xi| = \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2}_{\text{pos.}} \underbrace{\sin^2(kh)}_{\text{pos.}}}$$

im allgemeinen ist $|\xi| > 1$

<u>Fazit</u>: Dieses Verfahren ist unbedingt instabil!

<u>Bemerkung</u>: für andere Verfahren kann bedingte oder unbedingte Stabilität gezeigt werden.

<u>Beispiele</u>: Lax-Friedrichs-Verfahren: $\rho_i^{j+1} = \frac{1}{2}\left(\rho_{i+1}^j + \rho_{i-1}^j\right) - \frac{a\tau}{2h}\left(\rho_{i+1}^j - \rho_{i-1}^j\right)$

ist bedingt stabil, falls $\frac{a\tau}{h} < 1$

Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (CFL)

implizites Verfahren : $\rho_i^{j+1} = \rho_i^j - \frac{a\tau}{2h}\left(\rho_{i+1}^{j+1} - \rho_{i-1}^{j+1}\right)$

unbedingt stabil