Differentialgleichungen II

Fourier-Methoden

Einführendes Beispiel in 1D

Vorbemerkung:
Betrachte das eindimensionale Randwertproblem (Poisson Gleichung)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} & & -T\frac{d^2u}{dx^2} & = & f(x), \quad 0 < x < l \\ u(0) & = & u(l) & = & 0 \end{array} \right.$$

Anwendung: Die Gleichung beschreibt die Gleichgewichtslage eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung T und äußerer Kraft $f(x)$.

1

Bemerkung: (Allgemeine Approximative Lösung der 1D Poisson Gleichung)

- Sei das eindimensionale Randwertproblem gegeben:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} & & -T\frac{d^2u}{dx^2} & = & f(x), \quad 0 < x < l, \\ u(0) & = & u(l) & = & 0. \end{array} \right.$$

- Approximiere die rechte Seite $f(x)$ durch eine endliche Fourier-Reihe $f_N(x)$:

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu $(n = 1, \dots, N)$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \, dx.$$

- Dann ist eine approximative Lösung des Randwertproblems gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

2

Vorbemerkung:
Betrachte das eindimensionale Randwertproblem (Poisson Gleichung)

$$\begin{cases} \quad -T\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), & 0 < x < l \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

Anwendung: Die Gleichung beschreibt die Gleichgewichtslage eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung T und äußerer Kraft $f(x)$.

1

Bemerkung: (Allgemeine Approximative Lösung der 1D Poisson Gleichung)

- Sei das eindimensionale Randwertproblem gegeben:

$$\begin{cases} -T\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

- Approximiere die rechte Seite $f(x)$ durch eine endliche Fourier-Reihe $f_N(x)$:

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Die Fourier-Koeffizienten ergeben sich zu $(n = 1, \ldots, N)$

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\,dx.$$

- Dann ist eine approximative Lösung des Randwertproblems gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

2

Fourier-Methode für die Wärmeleitungsgleichung

Erinnerung: (Wärmeleitungsgleichung) Betrachte das Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \le T, \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Gesucht ist eine Lösung in Form einer Fourier-Reihe:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Bemerkung: Da lediglich $\sin$ in der Fourier-Reihe verwendet wird, sind die homogenen Randbedingungen automatisch erfüllt.

Lösungsansatz:

- Für die Koeffizienten der Lösungsdarstellung gilt:

$$a_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx.$$

- Die rechte Seite (Inhomogenität) $f(x,t)$ besitzt die Darstellung

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \text{mit } c_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx.$$

- Berechne die Zeit- und Ortsableitungen des Lösungsansatzes für u:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial t}(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\frac{n\pi}{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

- Erhalte für die linke Seite der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t + u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial a_n}{\partial t}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Koeffizientenvergleich mit der Fourier-Reihe für $f(x,t)$ ergibt System gewöhnlicher DGLn:

$$\frac{\partial a_n}{\partial t}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2} = c_n(t).$$

- Anfangsbedingungen $a_1(0), a_2(0), \ldots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx \\ \Rightarrow \quad a_n(0) &= b_n, \quad n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Lineares System entkoppelter gewöhnlicher DGLn:

- Erhalte entkoppeltes lineares System von gewöhnlichen DGLn:

$$\dot{a}_n + k_n a_n = c_n, \quad n = 1,2,\ldots$$

mit $k_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$.

- Die Lösungen lassen sich direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-k_n \cdot t\right) + \int_0^t \exp\left(-k_n\cdot(t-s)\right) c_n(s)\, ds.$$

Erinnerung: (Wärmeleitungsgleichung) Betrachte das Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & : \quad 0 < x < l, \ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = g(x) & : \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & : \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Gesucht ist eine Lösung in Form einer Fourier-Reihe:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Bemerkung: Da lediglich $\sin$ in der Fourier-Reihe verwendet wird, sind die homogenen Randbedingungen automatisch erfüllt.

Lösungsansatz:

- Für die Koeffizienten der Lösungsdarstellung gilt:

$$a_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx.$$

- Die rechte Seite (Inhomogenität) $f(x,t)$ besitzt die Darstellung

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \text{mit } c_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx.$$

- Berechne die Zeit- und Ortsableitungen des Lösungsansatzes für u:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial t}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

- Erhalte für die linke Seite der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t + u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial a_n}{\partial t}(t) + a_n(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

- Koeffizientenvergleich mit der Fourier-Reihe für $f(x,t)$ ergibt System gewöhnlicher DGLn:

$$\frac{\partial a_n}{\partial t}(t) + a_n(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} = c_n(t).$$

- Anfangsbedingungen $a_1(0), a_2(0), \ldots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\, dx \\ \Rightarrow \quad a_n(0) &= b_n, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Lineares System entkoppelter gewöhnlicher DGLn:

- Erhalte entkoppeltes lineares System von gewöhnlichen DGLn:

$$\dot{a}_n + k_n a_n = c_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

mit $k_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$.

- Die Lösungen lassen sich direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-k_n \cdot t\right) + \int_0^t \exp\left(-k_n \cdot (t-s)\right) c_n(s) \; ds.$$

3

Fourier-Methode: Eigenschaften, Randbedingungen

Beobachtung:

- Für $T > 0$ fest, fallen die $a_n(t)$ exponentiell schnell ab ($n \to \infty$).
  Höhere Werte für n beschreiben die höheren Frequenzen in der Lösung.
- Für n fest, fallen die $a_n(t)$ exponentiell schnell ab ($t \to \infty$).
  Der Abfall ist umso schneller, je größer n ist. Für t groß beschreiben wenige Terme der Fourier-Reihe die exakte Lösung sehr gut.

Beispiel:

Wir betrachten das inhomogene Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & x & : \ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & 0 & : \ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{array}\right.$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & 0 \\ c_n(t) & = & c_n = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{array}$$

und damit

$$a_n(t) = 2\int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\,ds = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right)$$

Periodische Randbedingungen

Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-l, l]$ gegeben durch

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \ -l < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ -l \le x \le l \\ u(-l,t) & = & u(l,t) & : \ 0 \le t \le T \\ u_x(-l,t) & = & u_x(l,t) & : \ 0 \le t \le T \end{array}\right.$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier–Reihen ist damit

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)$$

Bisher:

Anfangsrandwertprobleme mit homogenen Randbedingungen, d.h.

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ 0 \le x \le l \\ u(0,t) & = & u(l,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{array}\right.$$

Sind beide Enden **wärmeisoliert**, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ 0 \le x \le l \\ u_x(0,t) & = & 0 & : \ 0 \le t \le T \\ u_x(l,t) & = & 0 & : \ 0 \le t \le T \end{array}\right.$$

Beobachtung:

- Für $T > 0$ fest, fallen die $a_n(t)$ exponentiell schnell ab $(n \to \infty)$.
  Höhere Werte für n beschreiben die höheren Frequenzen in der Lösung.

- Für n fest, fallen die $a_n(t)$ exponentiell schnell ab $(t \to \infty)$.
  Der Abfall ist umso schneller, je größer n ist. Für t groß beschreiben wenige Terme der Fourier-Reihe die exakte Lösung sehr gut.

Beispiel:

Wir betrachten das inhomogene Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & x & : \ 0 < x < 1,\, 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & 0 & : \ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{array}\right.$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ c_n(t) &= c_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

und damit

$$a_n(t) = 2\int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\,ds = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right)$$

Bisher:

Anfangsrandwertprobleme mit homogenen Randbedingungen, d.h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & : \ 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Frage jetzt:

Was passiert

1) bei (einseitig **Neumannschen**) Randbedingungen der Form

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0,$$

2) bei **periodischen** Randbedingungen der Form

$$u(0,t) = u(l,t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)$$

Wie sehen die entsprechenden Fourier–Methoden aus?

Sind beide Enden **wärmeisoliert**, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &: 0 < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= g(x) &: 0 \leq x \leq l \\ u_x(0,t) &= 0 &: 0 \leq t \leq T \\ u_x(l,t) &= 0 &: 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x,t) = 1, \qquad u(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.

Ein **Lösungsansatz** lautet damit

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Periodische Randbedingungen

Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-l, l]$ gegeben durch

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &: -l < x < l,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= g(x) &: -l \leq x \leq l \\ u(-l,t) &= u(l,t) &: 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l,t) &= u_x(l,t) &: 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier–Reihen ist damit

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)$$

Mit den Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} f(x,t) &= c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + d_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right) \\ g(x) &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + q_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right) \end{aligned}$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{dt}(t) &= c_0(t) \\ \frac{da_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2} a_n(t) &= c_n(t) \\ \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2} b_n(t) &= d_n(t) \end{aligned}$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten

$$a_0(0) = p_0, \quad a_n(0) = p_n, \quad b_n(0) = q_n$$

Fourier-Methode für die Wellengleichung

Idee: Lösungssuche analog zur Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{tt}-u_{xx} & = & f(x,t) & : \ 0<x<l,\, 0<t\le T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ 0\le x\le l \\ u_t(x,0) & = & h(x) & : \ 0\le x\le l \\ u(0,t) & = & u(l,t)=0 & : \ 0\le t\le T \end{array}\right.$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Die Fourier–Reihen für $f(x,t)$, $g(x)$ und $h(x)$ ergeben DGL's für die Lösungskoeffizienten $a_i(t)$, $i=1,2,\ldots$.

Beispiel:

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_{tt}-u_{xx} & = & 0 & : \ 0<x<l,\, 0<t\le T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \ 0\le x\le l \\ u_t(x,0) & = & h(x) & : \ 0\le x\le l \\ u(0,t) & = & u(l,t)=0 & : \ 0\le t\le T \end{array}\right.$$

ist gegeben durch

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right)+\frac{d_n l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dabei sind b_n die Fourier–Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung $u(x,0)=g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x,0)=h(x)$.

Idee: Lösungssuche analog zur Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= f(x,t) &: 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) &= g(x) &: 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) &= h(x) &: 0 \le x \le l \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 &: 0 \le t \le T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Die Fourier–Reihen für $f(x,t)$, $g(x)$ und $h(x)$ ergeben DGL's für die Lösungskoeffizienten $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Beispiel:

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & : \; 0 < x < l,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) &= g(x) & : \; 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) &= h(x) & : \; 0 \le x \le l \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 & : \; 0 \le t \le T \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dabei sind b_n die Fourier–Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x,0) = h(x)$.

Einführendes Beispiel in 1D

Fourier-Methode für die Wärmeleitungsgleichung

Differentialgleichungen II

Fourier-Methode: Eigenschaften, Randbedingungen

Fourier-Methode für die Wellengleichung