

Differentialgleichungen II



Wellengleichung

Wellengleichung

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Untersuchung der Wellengleichung
$$u_{tt} - \Delta u = 0$$
- **Inhomogene Wellengleichung**
$$u_{tt} - \Delta u = f$$
- Geeignete **Anfangs-/Randbedingungen** seien gegeben.
- Bezeichne $t > 0$ die Zeitvariable und $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.
- **Gesucht:** Funktion $u : \Omega \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, wobei der Laplace-Operator auf die Ortsvariable $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ wirkt.
- Für die inhomogene Gleichung sei $f : \Omega \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

Ziel: (Formel von d'Alembert)
Betrachte das eindimensionale Anfangswertproblem:
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen.
Ziel: Diese Methode zur Lösung. ❶

Satz: (Formel von d'Alembert)

Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die **Formel von d'Alembert**:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Untersuchung der **Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

- **Inhomogene Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

- Geeignete **Anfangs-/Randbedingungen** seien gegeben.
- Bezeichne $t > 0$ die Zeitvariable und $\mathbf{x} \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.
- **Gesucht:** Funktion $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace-Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ wirkt.
- Für die inhomogene Gleichung sei $f : \Omega \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

Ziel: (Formel von d'Alembert)

Betrachte das eindimensionale Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen.

Ziel: Direkte Methode zur Lösung.



Satz: (Formel von d'Alembert)

Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die **Formel von d'Alembert**:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[g(x + t) + g(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

Bemerkung: Damit die so gewonnene Lösung $u(x, t)$ eine *differenzierbare* Lösung der Wellengleichung ist, muss gelten:

$$u \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R}).$$

2

Reflexionsmethode

Vorbemerkungen:

- Betrachte das Anfangswertproblem auf dem Halbraum \mathbb{R}_+ :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

- **Problem:** nicht einfach mit Formel von d'Alembert zu lösen, da die ein Cauchy-Problem voraussetzt.
- **Idee:** Erweitere das *Halbraumproblem* auf ein *Ganzraumproblem* und verwende dann die Formel von d'Alembert. 1

Zusammenfassung: (Reflexion des Halbraumes \mathbb{R}_+)

Eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(-x+t)] + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beispiel:

Die Lösung des ARWP

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = 0, u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t))$$

Vorbemerkungen:

- Betrachte das Anfangsrandwertproblem auf dem Halbraum \mathbb{R}_+ :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g, \quad u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

- **Problem:** nicht einfach mit Formel von d'Alembert zu lösen, da die ein Cauchy-Problem voraussetzt.
- **Idee:** Erweitere das *Halbraumproblem* auf ein *Ganzraumproblem* und verwende dann die Formel von d'Alembert.

1

Zusammenfassung: (Reflektion des Halbraumes \mathbb{R}_+)
Eine Lösung des *Anfangsrandwertproblems*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(-x+t)] + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beispiel:

Die Lösung des ARWP

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = 0, \quad u_t = \sin x \quad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 \quad \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{array} \right.$$

lautet

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\cos(x - t) - \cos(x + t))$$

Sphärische Mittelung

Vorbemerkungen:

- Betrachte den höherdimensionalen Fall ($n \geq 2$) des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

- Idee: Leite durch geeignete sphärische Mittelungen eine vereinfachte DGL her, die dann eine explizite Lösungsformel liefert.

Bemerkung: (Mittelwert über der Sphäre) Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definiere den Mittelwert von $u(x, t)$ über der Sphäre $\partial B_r(x)$ (oder auch $\partial B(x, r)$)

$$U(x, r, t) := \int_{\partial B_r(x)} u(x, t) dS(y)$$

Weiter sei

$$G(x, r) := \int_{\partial B_r(x)} g(y) dS(y)$$

$$H(x, r) := \int_{\partial B_r(x)} h(y) dS(y)$$

Satz: (Euler-Poisson-Darboux Gleichung)

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Dann löst $U(x; r, t)$ die Euler-Poisson-Darboux Gleichung

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ U = G, U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

2

Vorbemerkungen:

- Betrachte den **höherdimensionalen** Fall ($n \geq 2$) des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

- **Idee:** Leite durch geeignete **sphärische Mittelungen** eine vereinfachte DGL her, die dann eine explizite Lösungsformel liefert.

Bemerkung: (Mittelwert über der Kugel) Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definiere den **Mittelwert** von $u(x, t)$ **über der Kugel** $\partial B_r(x)$ (oder auch $\partial B(x, r)$)

$$U(x; r, t) := \int_{\partial B_r(x)} u(y, t) dS(y).$$

Weiter sei

$$G(x; r) := \int_{\partial B_r(x)} g(y) dS(y)$$

$$H(x, r) := \int_{\partial B_r(x)} h(y) dS(y)$$

Satz: (Euler-Poisson-Darboux Gleichung)

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Dann löst $U(x; r, t)$ die **Euler-Poisson-Darboux Gleichung**

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ U = G, U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

2

Kirchhoffsche Formel

Bemerkung: (Kirchhoffsche Formel für $n = 3$)
Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$ (**Kirchhoffsche Formel**):

$$u(x, t) = \int_{\partial B_t(x)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)) dS(y)$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten

$$u(x, t) = \int_{\partial B_t(x, 0)} t Dg(y) \cdot \left(\frac{y-x}{t}\right) dS(y) + \int_{\partial B_t(x, 0)} g(y) dS(y) + \int_{\partial B_t(x, t)} h dS(y)$$

und dies ist gerade – nach Umsortierung – die Kirchhoffsche Formel.

Verwendet man die Definitionen von G und H , so erhält man

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (G(x, t)) + H(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial B_t(x, 0)} g dS \right) + \int_{\partial B_t(x, t)} h dS \end{aligned}$$

Herleitung über die Euler-Poisson-Darboux Gleichung:

Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= rU \\ \tilde{G} &:= rG, \quad \tilde{H} := rH \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_t = rU_t = r \left(U_{tt} + \frac{2}{r} U_t \right) = rU_{tt} + 2U_t = (\tilde{U} + rU_t)_t = \tilde{U}_t$$

Also löst \tilde{U} das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{U}_t - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{G} = 0, \tilde{U}_r = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times (t = 0) \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$U(x, r, t) = \frac{1}{2} [G(r+t) - G(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{-t}^{t-r} H(y) dy$$

Die $U(x, r, t)$ aus $u(x, t)$ durch spätere Mitteilung entsteht, gilt
 $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow t} U(x, r, t)$

Bemerkung: (Kirchhoffsche Formel für $n = 3$)

Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ (**Kirchhoffsche Formel**):

$$u(x, t) = \int_{\partial B_t(x)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)) dS(y)$$

Herleitung über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung:

Wir definieren

$$\tilde{U} := rU$$

$$\tilde{G} := rG, \quad \tilde{H} := rH$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r \left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r \right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}$$

Also löst \tilde{U} das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy$$

Da $U(x; r, t)$ aus $u(x, t)$ durch spärliche Mittelung entsteht, gilt

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x; r, t)$$

Mit der Definition von \tilde{U} ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \right) \\ &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) \end{aligned}$$

Verwendet man die Definitionen von G und H , so erhält man

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (tG(x; t)) + tH(x; t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial B(x, t)} g dS \right) + t \int_{\partial B(x, t)} h dS\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) = \int_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\partial B(x, t)} g dS \right) &= \int_{\partial B(0, 1)} Dg(x + tz) \cdot z dS(z) \\ &= \int_{\partial B(x, t)} Dg(y) \cdot \left(\frac{y - x}{t} \right) dS(y)\end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} t Dg(y) \cdot \left(\frac{y - x}{t} \right) dS(y) + \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \\ + \int_{\partial B(x, t)} t h dS(y)$$

und dies ist gerade – nach Umsortierung – die **Kirchhoffsche Formel**.

Poissonsche Formel

Bemerkung: (Poissonsche Formel für $n = 2$)
Die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^2, t > 0$ (**Poissonsche Formel**):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\partial B_t(x)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + t Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy$$

Bemerkungen:

- Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das dreidimensionale Anfangswertproblem und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt
- Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip (Verwendung der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung und geeignete Definition von \tilde{U}), lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im \mathbb{R}^n ableiten.

Bemerkung: (Poissonsche Formel für $n = 2$)

Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ (**Poissonsche Formel**):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\partial B_t(x)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy$$

Bemerkungen:

- Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das dreidimensionale Anfangswertproblem und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt
- Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip (Verwendung der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung und geeignete Definition von \tilde{U}), lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im \mathbb{R}^n ableiten.

Sphärische Mittelung

Bemerkung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\partial\Omega$ seine Randfläche. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Sphärische Mittelung $M_\Omega f$ definiert durch

$$M_\Omega f(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y) dy$$

Es gilt $M_\Omega f(x) = M_{\Omega'} f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\Omega' \subset \Omega$ mit $x \in \Omega'$.

Satz (Leibniz-Formel für die Sphärische Mittelung): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\partial\Omega$ seine Randfläche. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Sphärische Mittelung $M_\Omega f$ definiert durch

$$M_\Omega f(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y) dy$$

Es gilt $M_\Omega f(x) = M_{\Omega'} f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\Omega' \subset \Omega$ mit $x \in \Omega'$.

Kirchhoffsche Formel

Bemerkung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\partial\Omega$ seine Randfläche. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Kirchhoffsche Formel $K_\Omega f$ definiert durch

$$K_\Omega f(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y) dy$$

Es gilt $K_\Omega f(x) = K_{\Omega'} f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\Omega' \subset \Omega$ mit $x \in \Omega'$.

Reflexionsmethode

Bemerkung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\partial\Omega$ seine Randfläche. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Reflexionsmethode $R_\Omega f$ definiert durch

$$R_\Omega f(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y) dy$$

Es gilt $R_\Omega f(x) = R_{\Omega'} f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\Omega' \subset \Omega$ mit $x \in \Omega'$.

Differentialgleichungen II



Wellengleichung

Bemerkung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\partial\Omega$ seine Randfläche. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Wellengleichung $W_\Omega f$ definiert durch

$$W_\Omega f(x) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y) dy$$

Es gilt $W_\Omega f(x) = W_{\Omega'} f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\Omega' \subset \Omega$ mit $x \in \Omega'$.

Poissonsche Formel

Bemerkung: (Poissonsche Formel für $n=2$)
Die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_t = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ u|_{t=0} = g & \text{auf } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^2, t > 0$ (Poissonsche Formel)

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{\partial B(x,t)} \frac{g(y)}{|x-y|} dy$$

Bemerkung:

- In dieser Lösungsgleichung ablesen, betrachtet man das Teilintervall $\partial B(x,t)$ und nicht $\partial B(x,t)$ in der Ebene \mathbb{R}^2 und der dritten Dimension t ist Zeit.
- Nach einem von Helmholtz die Kirchhoffsche Formel analoge Prinzip (Ersetzung der Laplace-Formel-Gleichung um geeignete Ableitungen von Ω), wenn die Lösungswerte für das Anfangswertproblem der Wellengleichung in \mathbb{R}^n ablesen.