

Differentialgleichungen II

Wochen 08 / J. Behrens

Herleitung der Lösungsdarstellung:

• Zur Vereinfachung: $x \in \mathbb{R}$

• Beobachtung: Ist $u(x, t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} = \Delta u,$$

so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auch Lösung

• Ansatz: Suche spezielle Lösungen der Form

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} v\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= u(\lambda x, \lambda^2 t) \\ \Rightarrow \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} &= \lambda^2 u_t - \lambda^2 \Delta u \\ &= \lambda^2 (u_t - \Delta u) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{(\lambda x)^2}{\lambda^2 t} = \frac{x^2}{t}$$

$\Rightarrow$ Suche Lösungen, die von $\frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}$ abhängen

denn damit gilt:

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} v - \frac{x}{2} t^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{2}} v'$$

$$u_x(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} v'$$

$$u_{xx}(x, t) = t^{-\frac{3}{2}} v''$$

$$\text{Es folgt: } u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} v - \frac{x}{2} t^{-\frac{3}{2}} v' - t^{-\frac{3}{2}} v'' = 0$$

• Substituiere $r = \frac{x}{\sqrt{t}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v + \frac{r}{2} v' + v'' = 0$$

$\underbrace{\quad}_{\frac{1}{2}(rv)'} = 0$

Gleichung 2. Ordnung

- Umschreiben:

$$(v')' + \frac{1}{2}(v v')' = 0$$

$$\Rightarrow v' + \frac{1}{2} v v' = \text{konst.} = c \in \mathbb{R} \quad \text{Gleichung 1. Ordnung}$$

- Annahme: $\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} v'(r) = 0 \Rightarrow c = 0$

$$\text{• Damit gilt } v' = -\frac{1}{2} v v' \Rightarrow v(r) = b e^{-\frac{r^2}{4}}$$

- Also lautet die explizite Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad \text{Fundamentallösung}$$

(verwende: Einsetzen $\frac{x}{\sqrt{t}}$ und bestimme b , so dass $\int_{\mathbb{R}} \phi(x, t) dx = 1$)