

Differentialgleichungen II



Greensche Funktion

Erinnerung

Definition: (Greensche Funktion)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned}\Delta \Phi^x &= 0 && \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) && \text{auf } \partial U.\end{aligned}$$

Dann ist die **Greensche Funktion** G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)

Sei $u \in C^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$)

1. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in \mathbf{y} .
2. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U$$

3. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist eindeutig bestimmt
4. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist symmetrisch:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \text{①}$$

Definition: (Greensche Funktion)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned}\Delta \Phi^x &= \quad \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial U.\end{aligned}$$

Dann ist die **Greensche Funktion** G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)

Sei $u \in C^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$)

1. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in \mathbf{y} .
2. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U$$

3. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist eindeutig bestimmt
4. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist symmetrisch:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$



Greensche Funktion und Poissonkern für Halbraum \mathbb{R}_+^n

Definition: (Poissonkern)

Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n},$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$ heißt **Poissonkern** von \mathbb{R}_+^n .

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}.$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist. Weiter kann man zeigen, dass u **unendlich oft differenzierbar** ist.

Definition: (Poissonkern)

Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n},$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$ heißt **Poissonkern** von \mathbb{R}_+^n .

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)

Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}.$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist. Weiter kann man zeigen, dass u **unendlich oft differenzierbar** ist.

Greensche Funktion und Poissonkern für Einheitskreis

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung auf der Einheitskugel)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{|y|=1} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y).$$

Der Poissonkern für die Einheitskugel lautet also

$$K(x,y) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x-y|^n}$$

für $|x| < 1$ und $|y| = 1$.

Begründung:

- Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann bezeichnet

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

den **dualen Punkt** von x bezüglich des Randes der Einheitskugel $\partial B(0,1)$.

- Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{in } \partial B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \\ \Phi^x = \Phi(y-x) & \text{auf } \partial B(0,1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(y) = \Phi(|x|(y-x)).$$

- Erhalte die Greensche Funktion für die Einheitskugel

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-x))$$

für $x,y \in \partial B(0,1)$, $x \neq y$.

Bemerkung: Mit der Transformation

$$\tilde{u}(x) = u(x)$$

lässt sich leicht eine Darstellung für die Kugel $B(0,r) = \{x : |x| < r\}$ herleiten.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung auf der Einheitskugel)

Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y}).$$

Der Poissonkern für die Einheitskugel lautet also

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}$$

für $|\mathbf{x}| < 1$ und $|\mathbf{y}| = 1$.

Begründung:

- Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann bezeichnet

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

den **dualen Punkt** von \mathbf{x} bezüglich des Randes der Einheitskugel $\partial B(0, 1)$.

- Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{in } \overset{\circ}{B}(0, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \partial B(0, 1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})).$$

- Erhalte die Greensche Funktion für die Einheitskugel

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$$

für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(0, 1)$, $x \neq y$.

Bemerkung: Mit der Transformation

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$$

lässt sich leicht eine Darstellung für die Kugel $B(0, r) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < r\}$ herleiten.

Erinnerung

Definition (Greensche Funktion)
 Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\partial^* E$ die Lösung des Dirichlet-Problems.
 $\Delta \Phi = 0$ in E ,
 $\Phi = \psi$ auf $\partial^* E$.
 Dann ist die **Greensche Funktion** G auf E gegeben durch
 $G(x, y) = \Phi(x, y) - \psi(x, y)$, $x, y \in E$.

Satz (Lösung des Dirichlet-Problems im Poisson-Formal)
 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Dirichlet-Problems im Poisson-Formal. Dann
 heißt G die Greensche Funktion.

$$u(x, y) = \int_{\partial^* \Omega} \psi(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial n}(\xi, \eta) dA(\xi, \eta) + \int_{\Omega} f(\xi, \eta) G(\xi, \eta) dA(\xi, \eta)$$

- Beobachtung (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(x, y)$)**
- $G(x, y)$ ist bis auf das Polglied $-\frac{1}{2\pi} \ln r$ harmonisch in y .
 - $G(x, y)$ erfüllt homogene Randbedingungen.
 $G(x, y) = 0$ für $(x, y) \in \partial^* \Omega$.
 - $G(x, y)$ ist eindeutig bestimmt.
 - $G(x, y)$ ist symmetrisch: $G(x, y) = G(y, x)$.

Greensche Funktion und Poissonkern für Halbraum \mathbb{R}_+^2

Definition (Poissonkern)
 Die Funktion

$$K(x, y) := \frac{2y}{\pi(x^2 + y^2)^2}$$
 mit $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}_+^2$ heißt **Poissonkern** von \mathbb{R}_+^2 .

Satz (Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung)
 Sei die Randbedingung

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^2 \\ u = \psi & \text{auf } \partial \mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \end{cases}$$
 gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi) \int_0^\infty K(x, y) dA(\xi, \eta) dy$$
 Folgerungen in die Lösung $u(x)$ zeigen

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x, y) dA(\xi, \eta) = 1$$
Beobachtung: Siehe ψ beachten, ist ψ harmonisch, dann u ebenfalls die Lösung ist.

Differentialgleichungen II



Greensche Funktion

Greensche Funktion und Poissonkern für Einheitskreis

Satz (Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf dem Einheitskreis)
 Sei die Randbedingung

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = \psi & \text{auf } \partial D \end{cases}$$
 gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(x) = \int_{\partial D} \psi(\xi) \int_0^{2\pi} K(x, y) dA(\xi, \eta) d\theta$$
 Die Poissonkern für die Einheitskreis heißt die

$$K(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{2\pi |x - y|^2}$$
 wobei $|x| < 1$ und $|y| = 1$.

Beobachtung:
 Die Greensche Funktion für den Einheitskreis ist

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln |x - y| - \ln |x - \frac{y}{|x|^2}| \right)$$
 wobei $|x| < 1$ und $|y| = 1$.

Beobachtung (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(x, y)$)
 $G(x, y)$ ist bis auf das Polglied $-\frac{1}{2\pi} \ln r$ harmonisch in y .