Differentialgleichungen II

Greensche Funktion

Erinnerung

Definition: (Greensche Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= && \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) && \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$)

1. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$.
2. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen:
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U$$
3. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist eindeutig bestimmt
4. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist symmetrisch:
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

1

Definition: (Greensche Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= && \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) && \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$)

1. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$.
2. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen:
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=0 \quad \forall \mathbf{y}\in\partial U, \mathbf{x}\in U$$
3. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist eindeutig bestimmt
4. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist symmetrisch:
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=G(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

1

Greensche Funktion und Poissonkern für Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

Definition: (Poissonkern)
Die Funktion

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n},$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ heißt Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf} \quad \partial\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\, d\mathbf{y}.$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist. Weiter kann man zeigen,
dass u unendlich oft differenzierbar ist.

Definition: (Poissonkern)
Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n},$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ heißt Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf} \quad \partial\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \, d\mathbf{y}.$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist. Weiter kann man zeigen, dass u unendlich oft differenzierbar ist.

Greensche Funktion und Poissonkern für Einheitskreis

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung auf der Einheitskugel)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ u = g & \text{auf} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \, dS(\mathbf{y}).$$

Der Poissonkern für die Einheitskugel lautet also

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}$$

für $|\mathbf{x}| < 1$ und $|\mathbf{y}| = 1$.

Begründung:

- Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann bezeichnet

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

  den dualen Punkt von $\mathbf{x}$ bezüglich des Randes der Einheitskugel $\partial B(0,1)$.
- Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = & 0 & \text{in} & \mathring{B}(0,1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ \Phi^x = & \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf} & \partial B(0,1) \end{cases}$$

  gegeben durch

$$\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})).$$

- Erhalte die Greensche Funktion für die Einheitskugel

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$$

  für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(0,1)$, $x \neq y$.

Bemerkung: Mit der Transformation

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$$

lässt sich leicht eine Darstellung für die Kugel $B(0,r) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < r\}$ herleiten.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung auf der Einheitskugel)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ u = g & \text{auf} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \, dS(\mathbf{y}).$$

Der Poissonkern für die Einheitskugel lautet also

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}$$

für $|\mathbf{x}| < 1$ und $|\mathbf{y}| = 1$.

Begründung:

- Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann bezeichnet

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

den dualen Punkt von $\mathbf{x}$ bezüglich des Randes der Einheitskugel $\partial B(0,1)$.

- Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x = & 0 \quad \text{in} \quad \mathring{B}(0,1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ \Phi^x = & \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \quad \text{auf} \quad \partial B(0,1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})).$$

- Erhalte die Greensche Funktion für die Einheitskugel

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}))$$

für $\mathbf{x},\mathbf{y} \in B(0,1)$, $x \neq y$.

Bemerkung: Mit der Transformation

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$$

lässt sich leicht eine Darstellung für die Kugel $B(0, r) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < r\}$ herleiten.

Greensche Funktion und Poissonkern für Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

Definition: (Poissonkern)
Die Funktion

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n},$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ heißt Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)^T : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\, d\mathbf{y}.$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist. Weiter kann man zeigen, dass u unendlich oft differenzierbar ist.

Erinnerung

Definition: (Greensche Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= \quad \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = -\int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$)

1. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$.
2. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen:
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U$$
3. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist eindeutig bestimmt
4. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist symmetrisch:
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

Differentialgleichungen II

Greensche Funktion

Greensche Funktion und Poissonkern für Einheitskreis

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung auf der Einheitskugel)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1-|\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\, dS(\mathbf{y}).$$

Der Poissonkern für die Einheitskugel lautet also

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1-|\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}$$

für $|\mathbf{x}| < 1$ und $|\mathbf{y}| = 1$.