Differentialgleichungen II

Woche 06 / J. Behrens

(1) **Definition**: (harmonische Funktion)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine zweimal stetig diff'bare Funktion, welche die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

erfüllt. Dann heißt u harmonische Funktion.

- Ziel: Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n$
- Beobachtung: Δ-Operator ist invariant gegen Rotation im $\mathbb{R}^n$
- Lösungsansatz: $u(\vec{x}) = v(r)$ mit $r = \|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$
- Differenzieren von r: $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (\vec{x} \neq 0)$
- Differenzieren von u (für $i = 1, \dots, n$):

$$u_{x_i} = v'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow u_{x_i x_i} = v''(r) \cdot \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right)$$

- Einsetzen in Δ-Operator:

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

- u ist harmonisch ($\Delta u = 0$), daher ergibt sich die gewöhnliche DGL:

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0$$

- Setze $w = v' \neq 0$, dann löst w die lineare DGL:

$$w' = -\frac{n-1}{r} w$$

- Allg. Lösung (DGL(I)):

$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ konstant.

- Also: $v' = \dfrac{\alpha}{r^{n-1}}$

- Integration: $v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n=2) \\ \dfrac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$ $b, c \in \mathbb{R}$, konst.

(2) **Satz**: (Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \, dS = \fint_{B(\mathbf{x},r)} u \, d\mathbf{y}.$$

Dabei bezeichne $\fint$ die Mittelung über der Sphäre oder der Kugel:

$$\fint \cdots = \frac{1}{\mathrm{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \cdots$$

Beweis:

- Definiere für festes $\vec{x} \in U$ die Funktion $\varphi(r)$

$$\varphi(r) = \fint_{\partial B(\vec{x}, r)} u(\vec{y}) \, dS(\vec{y}) = \fint_{\partial B(0,1)} u(\vec{x} + r\vec{z}) \, dS(\vec{z})$$

- Dann gilt:

$$\varphi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(\vec{x} + r\vec{z}) \cdot \vec{z} \, dS(\vec{z})$$

- Greensche Formeln:

$$\varphi'(r) = ⨍_{\partial B(\vec{x},r)} Du(\vec{y})\, \frac{\vec{y}-\vec{x}}{r}\, dS(\vec{y})$$

$$= ⨍_{\partial B(\vec{x},r)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dS(\vec{y}) = \frac{r}{n} ⨍_{B(\vec{x},r)} \underbrace{\Delta u(\vec{y})}_{=0} dy = 0$$

- Also ist φ konstant und es gilt:

$$\varphi(r) = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t \to 0} ⨍_{\partial B(\vec{x},t)} u(\vec{y})\, dS(\vec{y}) = u(\vec{x})$$

- Polarkoordinaten-Darstellung:

$$\int_{B(x,r)} u\, d\vec{y} = \int_0^r \left[\int_{\partial B(\vec{x},s)} u\, dS(\vec{y}) \right] ds$$

$$= u(x) \int_0^r n\,\alpha(n)\, s^{n-1}\, ds$$

$$= \alpha(n)\, r^n\, u(\vec{x})$$

- Damit erhalte die "Mittelwert-Formel":

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(\vec{x},r)} u\, d\vec{y} = ⨍_{B(\vec{x},r)} u\, d\vec{y} \quad \boxtimes$$

3

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

Beweis:

- Nach Satz existiert die Lösungsdarstellung

$$u(\vec{x}) = \int_{\partial U} \left[\phi(\vec{y}-\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{y}) - u(\vec{y}) \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(\vec{y}-\vec{x}) \right] dS(\vec{y}) - \int_U \phi(\vec{y}-\vec{x}) \Delta u(\vec{y}) d\vec{y}$$

- Problem: Beim Dirichlet-Problem ist $\frac{\partial u}{\partial n}$ unbekannt.
- Anwendung der Greenschen Formeln:

$$- \int_U \phi^x(\vec{y}) \Delta u(\vec{y}) d\vec{y} = \int_{\partial U} u(\vec{y}) \frac{\partial \phi^x}{\partial \vec{n}}(\vec{y}) - \phi^x(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{y}) dS(\vec{y})$$

- Daher folgt:

$$\int_{\partial U} \phi^x(\vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{y}) dS(\vec{y}) = \int_U \phi^x(\vec{y}) \Delta u(\vec{y}) d\vec{y} + \int_{\partial U} u(\vec{y}) \frac{\partial \phi^x}{\partial \vec{n}}(\vec{y}) dS(\vec{y})$$

- Randbedingungen: $\phi^x(\vec{y}) = \phi(\vec{y}-\vec{x})$ auf ∂U:

$$\int_{\partial U} \phi(\vec{y}-\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{y}) dS(\vec{y}) = \int_U \phi^x(\vec{y}) \Delta u(\vec{y}) dy + \int_{\partial U} u(x) \frac{\partial \phi^x}{\partial \vec{n}}(\vec{y}) dS(\vec{y})$$

- Verwende Satz (Greensche Funktion):

$$u(x) = \int_{\partial U} \underbrace{u(\vec{y})}_{g} \underbrace{\left[\frac{\partial \phi^x(\vec{y})}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial \phi(\vec{y}-x)}{\partial \vec{n}} \right]}_{-\frac{\partial G(\vec{x},\vec{y})}{\partial \vec{n}}} dS(\vec{y}) + \int_U \underbrace{\left[\phi^x(\vec{y}) - \phi(\vec{y}-\vec{x}) \right]}_{-G(\vec{x},\vec{y})} \Delta u(\vec{y}) d\vec{y}$$

$\boxtimes$