Differentialgleichungen II

Laplace-Gleichung

Erinnerung

Definition: (PDG 2. Ordnung)
Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + f u = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$.
Den ersten Term der Gleichung nennt man den Hauptteil der PDG.
Es gelte oBdA:

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Definition: (Diagonalform)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\dots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla) u + (\mathbf{b}^\top \nabla) u + f u = g.$$

Dann st die zugehörige Diagonalform der PDG gegeben durch

$$(\nabla^\top D \nabla) \bar{u} + ((S^\top \tilde{\mathbf{b}})^\top \nabla) \bar{u} + \tilde{f} \bar{u} = \tilde{g}$$

mit Diagonalmatrix $D = S^\top A S$ und $S^\top S = Id$. Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b}(S\mathbf{y})$ und $\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(S\mathbf{y})$, $\tilde{g}(\mathbf{y}) := g(S\mathbf{y})$.

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\dots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla) u + (\mathbf{b}^\top \nabla) u + f u = g.$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A.

1. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und haben alle λ_i gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung elliptisch.
2. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n-1$ Eigenwerte, so heißt die Gleichung hyperbolisch.
3. Gilt $\lambda_k = 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \dots, n\}$, so heißt die Gleichung parabolisch.

Definition: (Korrekt gestelltes Problem)
Ein korrekt gestelltes Problem (auch wohlgestelltes Problem) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten *partiellen Differentialgleichung*, und
- einem Satz von *Anfangs- und/oder Randbedingungen*,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Existenz: Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig;
3. Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab
   d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

Definition: (PDG 2. Ordnung)
Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.
Den ersten Term der Gleichung nennt man den Hauptteil der PDG.
Es gelte oBdA:

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Definition: (Diagonalform)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Dann st die zugehörige Diagonalform der PDG gegeben durch

$$(\nabla^\top D \nabla)\tilde{u} + ((S^\top \tilde{\mathbf{b}})^\top \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

mit Diagonalmatrix $D = S^\top A S$ und $S^\top S = Id$. Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b}(S\mathbf{y})$ und $\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(S\mathbf{y})$, $\tilde{g}(\mathbf{y}) := g(S\mathbf{y})$.

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A.

1. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und haben alle λ_i gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung elliptisch.

2. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n-1$ Eigenwerte, so heißt die Gleichung hyperbolisch.

3. Gilt $\lambda_k = 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so heißt die Gleichung parabolisch.

Definition: (Korrekt gestelltes Problem)
Ein korrekt gestelltes Problem (auch wohlgestelltes Problem) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten *partiellen Differentialgleichung*, und
- einem Satz von *Anfangs- und/oder Randbedingungen*,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Existenz: Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig;
3. Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab
   d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

Einführung

Definition: (Laplace- und Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine zweimal stetig diff'bare Funktion, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u = u(\mathbf{x})$. Dann ist die Laplace-Gleichung gegeben durch

$$\Delta u = 0.$$

Die Poisson-Gleichung ist gegeben durch

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechter Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Satz: (Darstellung der Lösung der Poisson-Gleichung)
Eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Definition: (harmonische Funktion)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine zweimal stetig diff'bare Funktion, welche die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

erfüllt. Dann heißt u harmonische Funktion.

1

Beispiel:
Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\mathrm{vol}(K_1(0)) = \alpha(3) = \frac{4\pi}{3}.$$

Damit ist die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x\|}.$$

Definition: (Fundamentallösung der Laplace-Gleichung)
Die Funktion $\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, definiert durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Definition: (Laplace- und Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine zweimal stetig diff'bare Funktion, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u = u(\mathbf{x})$. Dann ist die Laplace-Gleichung gegeben durch

$$\Delta u = 0.$$

Die Poisson-Gleichung ist gegeben durch

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechter Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition: (harmonische Funktion)
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine zweimal stetig diff'bare Funktion, welche die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

erfüllt. Dann heißt u harmonische Funktion.

1

Definition: (Fundamentallösung der Laplace-Gleichung)
Die Funktion $\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, definiert durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Bemerkungen:

- Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.
- Die Fundamentallösung ist für alle $\mathbf{x} \neq 0$ eine harmonische Funktion.

Beispiel:
Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\mathrm{vol}(K_1(0)) = \alpha(3) = \frac{4\pi}{3}.$$

Damit ist die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x\|}.$$

Satz: (Darstellung der Lösung der Poisson-Gleichung)
Eine Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Eigenschaften harmonischer Funktionen

Satz: (Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \; dS = \fint_{B(\mathbf{x},r)} u \; d\mathbf{y}.$$

Dabei bezeichne $\fint$ die Mittelung über der Sphäre oder der Kugel:

$$\fint \cdots = \frac{1}{\mathrm{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \cdots$$

Die Umkehrung des Satzes gilt auch:
Satz: Für die Funktion $u \in C^2(U)$ gelte

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \; dS$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$. Dann ist u harmonisch.

Satz: (Maximumprinzip harmonischer Funktionen)
Sei $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ harmonisch in U. Dann gilt

1. Das Maximumprinzip:

$$\max_{x \in \overline{U}} u(\mathbf{x}) = \max_{x \in \partial U} u(\mathbf{x}).$$

2. Das starke Maximumprinzip: Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $x_0 \in U$ mit

$$u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(\mathbf{x}),$$

so folgt, dass u auf U konstant ist.

Eigenschaften:

- Erfüllt eine stetige Funktion $u \in C(U)$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ die *Mittelwerteigenschaft*, so ist u unendlich oft differenzierbar ($u \in C^\infty(U)$).
- Satz von Liouville: Die Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei harmonisch und beschränkt. Dann folgt bereits, dass u auf ganz $\mathbb{R}^n$ konstant ist.
- Beschränkte Lösungen der Poisson-Gleichung: Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ die Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \; d\mathbf{y} + C$$

mit einer Konstanten C.

Satz: (Eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe)
Sei $g \in C(\partial U)$ und $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Satz: (Mittelwert-Eigenschaft harmonischer Funktionen)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \, dS = \fint_{B(\mathbf{x},r)} u \, d\mathbf{y}.$$

Dabei bezeichne $\fint$ die Mittelung über der Sphäre oder der Kugel:

$$\fint \cdots = \frac{1}{\mathrm{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \cdots$$

Interpretation: Die Mittelwerteigenschaft besagt, dass der Funktionswert einer harmonischen Funktion an einer Stelle $\mathbf{x}$ stets gleich

- dem Mittelwert der Funktion über einer Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ bzw.
- dem Mittelwert der Funktion über der zugehörigen Sphäre um $\mathbf{x}$ ist. 2

Die Umkehrung des Satzes gilt auch:

Satz: Für die Funktion $u \in C^2(U)$ gelte

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \, dS$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$. Dann ist u harmonisch.

Beweis: (durch Widerspruch)

- Sei $\Delta u \neq 0$.
- Dann existiert eine Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, so dass $\Delta u > 0$ innerhalb von $B(\mathbf{x}, r)$.
- Andererseits gilt aber $0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} > 0$.
- Dies ist aber ein Widerspruch, d.h. u ist harmonisch.

Satz: (Maximumprinzip harmonischer Funktionen)
Sei $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ harmonisch in U. Dann gilt

1. Das Maximumprinzip:

$$\max_{x \in \overline{U}} u(\mathbf{x}) = \max_{x \in \partial U} u(\mathbf{x}).$$

2. Das starke Maximumprinzip: Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $x_0 \in U$ mit

$$u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(\mathbf{x}),$$

so folgt, dass u auf U konstant ist.

Beweisidee: Geeignete Anwendung der Mittelwerteigenschaft...

Satz: (Eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe)
Sei $g \in C(\partial U)$ und $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Beweis:

- **Annahme**: Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen.
- **Dann**: $w := \pm(u_1 - u_2)$ löst das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta w &= 0 \quad \text{in } U \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

- **Maximumprinzip**: Es folgt: $\pm(u_1 - u_2) = w \equiv 0$ auf U.
- **Daher**: $u_1 = u_2$.

Eigenschaften:

- Erfüllt eine stetige Funktion $u \in C(U)$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ die *Mittelwerteigenschaft*, so ist u unendlich oft differenzierbar ($u \in C^\infty(U)$).

- Satz von Liouville: Die Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei harmonisch und beschränkt. Dann folgt bereits, dass u auf ganz $\mathbb{R}^n$ konstant ist.

- Beschränkte Lösungen der Poisson-Gleichung: Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ die Form

  $$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + C$$

  mit einer Konstanten C.

Randwertprobleme

Definitionen: (Dirichlet- und Neumann-Problem)

- Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U \end{aligned}$$

  nennt man das Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung
  (bzw. der Laplace-Gleichung, falls $f = 0$).

- Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g \quad \text{auf } \partial U \end{aligned}$$

  heißt Neumann-Problem der Poisson- (bzw. Laplace-) Gleichung.
  Dabei ist $\mathbf{n}$ die äußere Normale an ∂U.

Satz: Sei $u \in C^2(\overline{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in U$ die Beziehung

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right) dS(\mathbf{y}) \\ &- \int_U \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Die Funktion Φ bezeichnet die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Definitionen: (Dirichlet- und Neumann-Problem)

- Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U \end{aligned}$$

  nennt man das Dirichlet-Problem der Poisson-Gleichung (bzw. der Laplace-Gleichung, falls $f = 0$).

- Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g \quad \text{auf } \partial U \end{aligned}$$

  heißt Neumann-Problem der Poisson- (bzw. Laplace-) Gleichung. Dabei ist $\mathbf{n}$ die äußere Normale an ∂U.

Satz: Sei $u \in C^2(\overline{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in U$ die Beziehung

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right) dS(\mathbf{y}) \\ &- \int_U \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Die Funktion Φ bezeichnet die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Beweis: Mittels Greenscher Formeln aus Analysis III.

Bemerkung: Anwendung: Zur Lösung der Laplace- und Poisson-Gleichung:
Wir können im Prinzip die Lösung an jedem Punkt berechnen,
aber benötigen Randdaten für u und auch für $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$.

Greensche Funktion

Definition: (Greensche Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= \quad \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

3

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$)

1. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$.
2. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen:
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U$$
3. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist eindeutig bestimmt
4. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist symmetrisch:
$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

Definition: (Greensche Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= & & \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & & \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

3

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$)

1. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$.

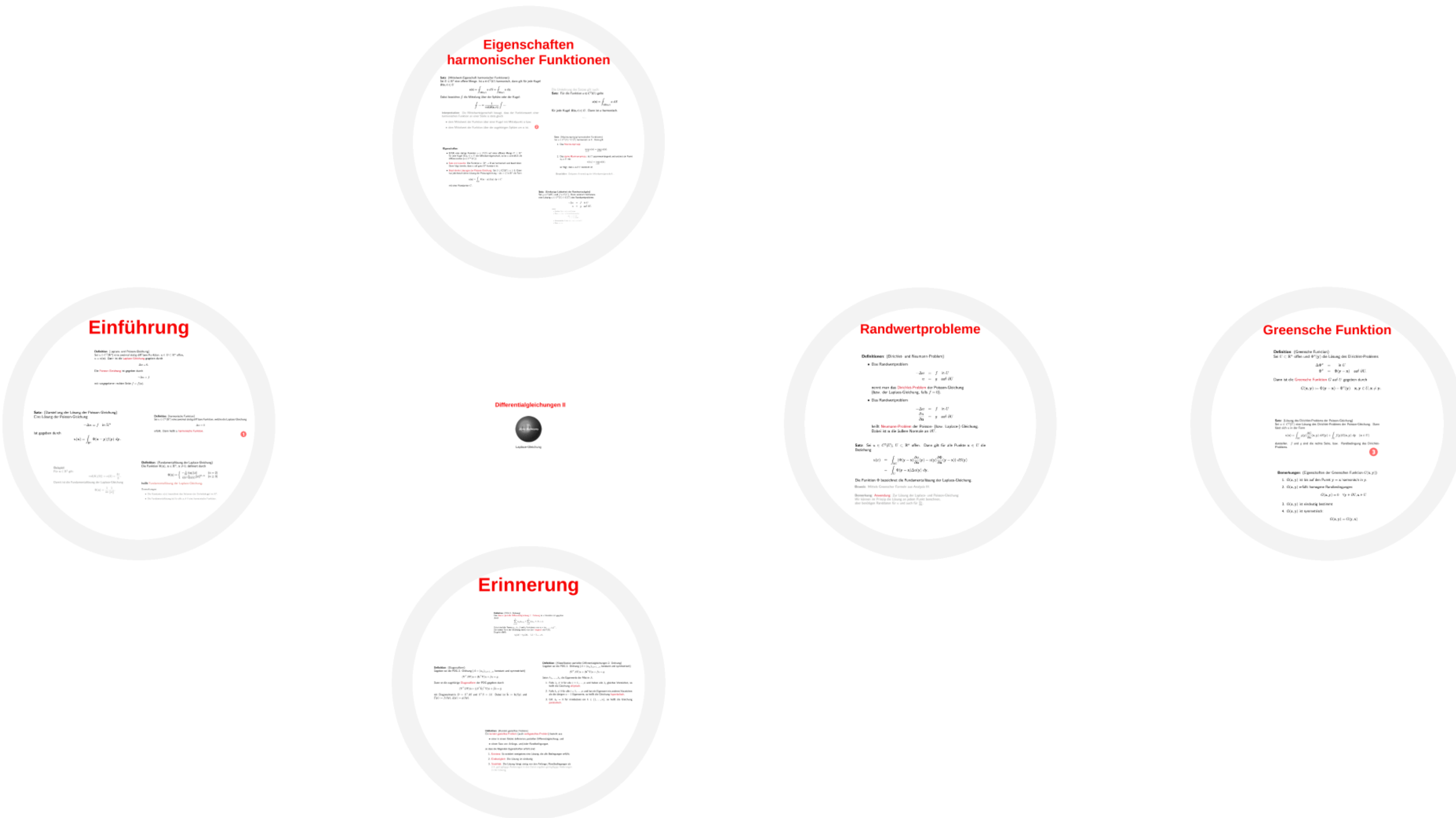
2. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U$$

3. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist eindeutig bestimmt

4. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist symmetrisch:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$


Eigenschaften harmonischer Funktionen
Einführung
Differentialgleichungen II
Randwertprobleme
Greensche Funktion
Erinnerung