

Differentialgleichungen II

Woche 05 / J. Behrens

Diagonal form

- Betrachte PDE 2. Ordnung mit zwei unabh. Variablen:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y) u = g(x, y)$$

$$(\nabla^T A \nabla) u + (b^T \nabla) u + f u = g \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)^T$$

$$\cdot \text{ Sei } \tilde{p} := S^T \tilde{b}, \quad \tilde{b} = (b_1, b_2)^T, \quad x = S \xi, \quad \xi = S^T x, \quad \tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)^T$$

$$\tilde{D} = S^{-1} A S = S^T A S \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$(\nabla^T S^T A S \nabla) \tilde{u} + (b^T S \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

$\underbrace{\quad}_{= \tilde{D}}$

$$\rightarrow \underbrace{\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Wellengleichung:

- Motivation: Lösung u beschreibt (z.B.) die Auslenkung einer schwingenden Saite
- Gleichung: "eindimensionale Wellengleichung" (1D im Raum x)

$$(*) \quad u_{tt}(t, x) - c^2 u_{xx}(t, x) = 0 \quad \text{für } (t, x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}$$

- Anfangsbedingungen: $u(0, x) = f(x)$
 $u_t(0, x) = g(x)$
- Die Konstante c beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit)
- Ansatz für die Lösungsfunktion:

$$\xi := x + ct, \quad \eta := x - ct$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$$

- Substituieren: $u(t, x) \rightarrow$ unter Verwendung von ξ und η :

$$u(x, t) = u\left(\frac{1}{2c}(\xi - \eta), \frac{1}{2}(\xi + \eta)\right) =: v(\xi, \eta)$$

- v ableiten: $v_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{2c} u_t + \frac{1}{2} u_x$

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} u_{xx} - \frac{1}{4c} u_{xt} + \frac{1}{4c} u_{tx} - \frac{1}{4c^2} u_{tt}$$

$$= \frac{1}{4} \underbrace{\left(u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt}\right)}_{=0} \quad \text{falls } u (*) \text{ erfüllt}$$

• Schreibe $u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \chi(\eta)$

$\Rightarrow u(t, x) = u(\xi, \eta) = \phi(\xi) + \chi(\eta) = \phi(x+ct) + \chi(x-ct)$ **

• Verwende Anfangswerte:

$u(0, x) = \phi(x) + \chi(x) = f(x)$ ①

$u_t(0, x) = c[\phi'(x) - \chi'(x)] = g(x)$

$\phi(x) - \chi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(z) dz + \frac{1}{c} (\phi(x_0) - \chi(x_0)) \quad x_0 \in \mathbb{R}$ ②

• Damit folgt:

② + ① $\Rightarrow 2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(z) dz + \frac{1}{c} (\phi(x_0) - \chi(x_0))$

① - ② $\Rightarrow 2\chi(x) = f(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(z) dz - \frac{1}{c} (\phi(x_0) - \chi(x_0))$

• Einsetzen in **:

$$u(t, x) = \phi(x+ct) + \chi(x-ct) = \frac{1}{2} \left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz \right]$$

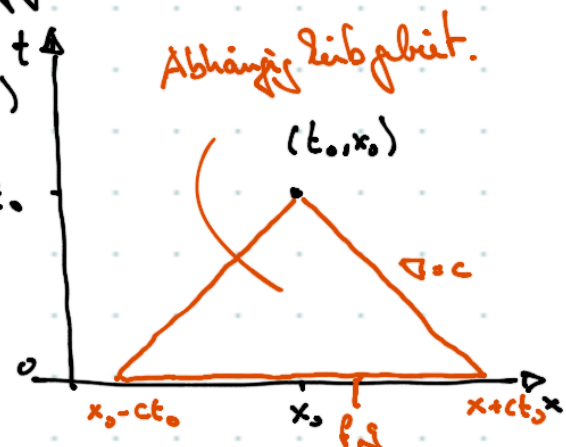
Lösungsdarstellung nach D'Alembert

• Interpretation: Die Lösungsdarstellung erlaubt Aussagen zum "Bestimmtheits-" und "Abhängigkeitsbereich"

o) Sei (t_0, x_0) gegeben $\rightarrow u(t_0, x_0)$

Frage: Für welche x -Werte müssen f und g bekannt sein?

$\Rightarrow f, g$ müssen auf $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ bekannt sein!



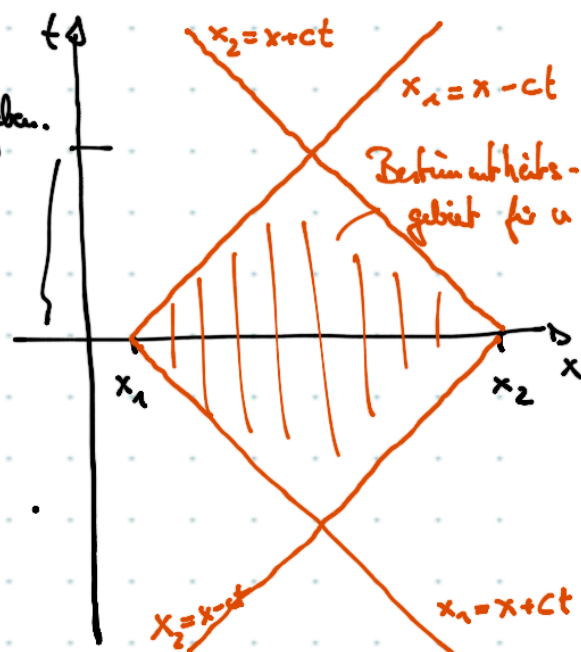
b) Seien f und g auf $[x_1, x_2]$ gegeben.

Frage: Wo ist u dann bestimmbar?

u ist bestimmbar im Parallelogramm

$$x_1 \leq x+ct \leq x_2$$

$$x_1 \leq x-ct \leq x_2$$



• Frage nach der Stabilität: Wie wirken sich (kleine) "Störungen" in den Daten g und f auf u aus?

Dann sei u Lösung zu f und g
 $\tilde{u}$ Lösung zu $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$

Ziel: $|u - \tilde{u}| \leq |f - \tilde{f}| + |g - \tilde{g}|$

Bsp:

$$\begin{aligned} |u(t, x) - \tilde{u}(t, x)| &\leq \frac{1}{2} |f(x+ct) - \tilde{f}(x+ct)| + \frac{1}{2} |f(x-ct) - \tilde{f}(x-ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(z) - \tilde{g}(z)| dz \\ &\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)| + \frac{1}{2c} \max_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - \tilde{g}(x)| \int_{x-ct}^{x+ct} dz \\ &\leq \|f - \tilde{f}\|_{\infty} + t \|g - \tilde{g}\|_{\infty} \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u - \tilde{u}\|_{\infty} \leq \|f - \tilde{f}\|_{\infty} + T \|g - \tilde{g}\|_{\infty}$$

• Also: für endliche Zeit $t \leq T, T \in \mathbb{R}$ hängt die Lösung u stetig von den Daten f und g ab.