Differentialgleichungen II

Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition

Definition: (PDG 2. Ordnung)
Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.
Den ersten Term der Gleichung nennt man den Hauptteil der PDG.
Es gelte oBdA:

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Spezialfall: Falls $a_{ij} \equiv \text{const.}$ für $i, j = 1, \ldots, n$, so lässt sich die PDG in Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^\top A \nabla) u + (\mathbf{b}^\top \nabla) u + fu = g,$$

mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ symmetrische Matrix und $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

Definition: (PDG 2. Ordnung)
Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + f u = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.
Den ersten Term der Gleichung nennt man den Hauptteil der PDG.
Es gelte oBdA:

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Spezialfall: Falls $a_{ij} \equiv \text{const.}$ für $i, j = 1, \ldots, n$, so lässt sich die PDG in Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g,$$

mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ symmetrische Matrix und $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

Diagonalform

Bemerkungen:

- Gegeben sei die PDG in Matrixschreibweise:

$$(\nabla^\top A \nabla) u + (\mathbf{b}^\top \nabla) u + f u = g,$$

mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ symmetrisch, konstant.

- Lineare Algebra: (Hauptachsentransformation)
Jede reelle, symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar:

$$D = S^{-1} A S,$$

wobei S orthogonal (d.h. $S^{-1} = S^\top$) gewählt werden kann.

Ansatz: (Herleitung von Normalformen)

- Verwende Koordinatentransformation:

$$\mathbf{x} = S\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = S^\top \mathbf{x}$$

- Setze $\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(S\mathbf{y})$.
- Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(S^\top \mathbf{x})$ folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

- Wegen $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}.$$

- Das bedeutet aber gerade

$$\nabla_x u(\mathbf{x}) = S \nabla_y \tilde{u}(S^\top \mathbf{x})$$

- Formal: $\nabla_x = S \nabla_y$
- Transponieren: $\nabla_x^\top = (S\nabla_y)^\top = \nabla_y^\top S^\top$.

Zusammenfassung: Löst u die Gleichung

$$(\nabla^\top A \nabla) u + (\mathbf{b}^\top \nabla) u + f u = g,$$

so erhalten wir für $\tilde{u}$ die PDG

$$(\nabla^\top S^\top A S \nabla) \tilde{u} + (\mathbf{b}^\top S \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Definition: (Diagonalform)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\dots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla) u + (\mathbf{b}^\top \nabla) u + f u = g.$$

Dann ist die zugehörige Diagonalform der PDG gegeben durch

$$(\nabla^\top D \nabla) \tilde{u} + ((S^\top \tilde{\mathbf{b}})^\top \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

mit Diagonalmatrix $D = S^\top A S$ und $S^\top S = Id$. Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b}(S\mathbf{y})$ und $\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(S\mathbf{y})$, $\tilde{g}(\mathbf{y}) := g(S\mathbf{y})$.

1

Bemerkungen:

- Gegeben sei die PDG in Matrixschreibweise:

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g,$$

  mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ symmetrisch, konstant.

- Lineare Algebra: (Hauptachsentransformation)
  Jede reelle, symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar:

$$D = S^{-1} A S,$$

  wobei S orthogonal (d.h. $S^{-1} = S^\top$) gewählt werden kann.

Ansatz: (Herleitung von Normalformen)

- Verwende Koordinatentransformation:

$$\mathbf{x} = S\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = S^\top \mathbf{x}$$

- Setze $\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(S\mathbf{y})$.
- Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(S^\top \mathbf{x})$ folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

- Wegen $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}.$$

- Das bedeutet aber gerade

$$\nabla_x u(\mathbf{x}) = S \nabla_y \tilde{u}(S^\top \mathbf{x})$$

- Formal: $\nabla_x = S\nabla_y$
- Transponieren: $\nabla_x^\top = (S\nabla_y)^\top = \nabla_y^\top S^\top$.

Zusammenfassung: Löst u die Gleichung

$$(\nabla^\top A \nabla) u + (\mathbf{b}^\top \nabla) u + f u = g,$$

so erhalten wir für $\tilde{u}$ die PDG

$$(\nabla^\top S^\top A S \nabla) \tilde{u} + (\mathbf{b}^\top S \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Definition: (Diagonalform)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\dots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Dann ist die zugehörige Diagonalform der PDG gegeben durch

$$(\nabla^\top D \nabla)\tilde{u} + ((S^\top \tilde{\mathbf{b}})^\top \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

mit Diagonalmatrix $D = S^\top A S$ und $S^\top S = Id$. Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}} := \mathbf{b}(S\mathbf{y})$ und $\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(S\mathbf{y})$, $\tilde{g}(\mathbf{y}) := g(S\mathbf{y})$.

1

Klassifikation

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\dots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A.

1. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und haben alle λ_i gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung elliptisch.
2. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n-1$ Eigenwerte, so heißt die Gleichung hyperbolisch.
3. Gilt $\lambda_k = 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \dots, n\}$, so heißt die Gleichung parabolisch.

Beispiel: Betrachte die PDG 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \tag{1}$$

$$b_1(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2)u = g(x_1, x_2). \tag{2}$$

Die Diagonalform ist dann gegeben durch

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}.$$

Dann ist die Differentialgleichung

1. elliptisch, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$;
2. hyperbolisch, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$;
3. parabolisch, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Bemerkung: (Erweiterung für nicht-konstante Koeffizienten)
Die Typeinteilung lässt sich auf Fälle mit nicht-konstanten Koeffizienten erweitern, was am folgenden Beispiel illustriert wird: Sei

$$yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy} = 0.$$

Dann ist die Koeffizientenmatrix A gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix}.$$

Die Diskriminante D lautet $D = 1 - xy$. Damit ist die Gleichung

1. parabolisch auf der Hyperbel $xy = 1$,
2. elliptisch in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und
3. hyperbolisch im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

2

Frage: Wofür werden die Gleichungen klassifiziert?
Antwort: Weil jeder Typ ein charakteristisches Lösungsverhalten aufweist!

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)
Gegeben sei die PDG 2. Ordnung ($A = (a_{ij})_{i,j=1\ldots,n}$ konstant und symmetrisch)

$$(\nabla^\top A \nabla)u + (\mathbf{b}^\top \nabla)u + fu = g.$$

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix A.

1. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und haben alle λ_i gleiches Vorzeichen, so heißt die Gleichung elliptisch.

2. Falls $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n - 1$ Eigenwerte, so heißt die Gleichung hyperbolisch.

3. Gilt $\lambda_k = 0$ für mindestens ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so heißt die Gleichung parabolisch.

Beispiel: Betrachte die PDG 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \tag{1}$$

$$b_1(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2)u = g(x_1, x_2). \tag{2}$$

Die Diagonalform ist dann gegeben durch

$$\lambda_1\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}.$$

Dann ist die Differentialgleichung

1. elliptisch, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$;
2. hyperbolisch, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$;
3. parabolisch, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Bemerkung: (Erweiterung für nicht-konstante Koeffizienten)
Die Typeinteilung lässt sich auf Fälle mit nicht-konstanten Koeffizienten erweitern, was am folgenden Beispiel illustriert wird: Sei

$$yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy} = 0.$$

Dann ist die Koeffizientenmatrix A gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix}.$$

Die Diskriminante D lautet $D = 1 - xy$. Damit ist die Gleichung

1. parabolisch auf der Hyperbel $xy = 1$,
2. elliptisch in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und
3. hyperbolisch im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

Frage: Wofür werden die Gleichungen klassifiziert?
Antwort: Weil jeder Typ ein charakteristisches Lösungsverhalten aufweist!

Normalformen

Definition: (Normalformen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

1. Die Normalform einer elliptischen PDG in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ ist
$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$
2. Die Normalform einer hyperbolischen PDG in $n{+}1$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^\top$ ist
$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$
3. Die Normalform einer parabolischen PDG in $n{+}1$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^\top$ ist
$$\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Bemerkung: in allen Fällen bezeichnet Δ den Laplace-Operator bezüglich $\mathbf{x}$.

Beispiele:

1. Die elliptische Laplace-Gleichung
$$\Delta u = 0.$$
2. Die hyperbolische Wellen-Gleichung
$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$
3. Die parabolische Wärmeleitungs-Gleichung
$$u_t = \Delta u.$$

Definition: (Normalformen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

1. Die Normalform einer elliptischen PDG in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ist
$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$
2. Die Normalform einer hyperbolischen PDG in $n{+}1$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^\top$ ist
$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$
3. Die Normalform einer parabolischen PDG in $n{+}1$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^\top$ ist
$$\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Bemerkung: in allen Fällen bezeichnet Δ den Laplace-Operator bezüglich $\mathbf{x}$.

Beispiele:

1. Die elliptische Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0.$$

2. Die hyperbolische Wellen-Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

3. Die parabolische Wärmeleitungs-Gleichung

$$u_t = \Delta u.$$

Wohlgestelltheit

Definition: (Korrekt gestelltes Problem)
Ein korrekt gestelltes Problem (auch wohlgestelltes Problem) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten *partiellen Differentialgleichung*, und
- einem Satz von *Anfangs- und/oder Randbedingungen*,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Existenz: Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig;
3. Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab
   d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

3

Beispiel: (Korrekt gestellte Wellengleichung)
Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad & \text{in } [0,\infty[\times\mathbb{R} && (1)\\ u = f \quad & \text{auf } \{t=0\}\times\mathbb{R} && (2)\\ u_t = g \quad & \text{auf } \{t=0\}\times\mathbb{R} && (3) \end{aligned}$$

ist ein wohlgestelltes hyperbolisches Problem.

- Die eindeutig bestimmte Lösung ist gegeben durch die Lösungsdarstellung von d'Alembert:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz\right).$$

- Die Lösung hängt stetig von den Daten ab, denn es gilt

$$\|u-\tilde{u}\|_\infty \le \|f-\tilde{f}\|_\infty + t\|g-\tilde{g}\|_\infty.$$

Beispiel: (Hadamard)
Das Anfangswertproblem für die PDG

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad & \text{in } \mathbb{R}^2 && (1)\\ u = f \quad & \text{auf } \mathbb{R}\times\{y=0\} && (2)\\ u_y = g \quad & \text{auf } \mathbb{R}\times\{y=0\} && (3) \end{aligned}$$

ist kein wohlgestelltes elliptisches Problem!

Beispiel: (Laplace-Gleichung)
Das Randwertproblem für die zweidimensionale Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{in } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}\\ u &= g \quad \text{auf } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \end{aligned}$$

ist ein korrekt gestelltes elliptisches Problem.
Die Lösung (eindeutig) ist durch die Poissonsche Integralformel gegeben:

$$u(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{2\pi}\oint_{\|\mathbf{z}\|=1}\frac{g(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2}ds$$

Definition: (Korrekt gestelltes Problem)
Ein korrekt gestelltes Problem (auch wohlgestelltes Problem) besteht aus

- einer in einem Gebiet definierten *partiellen Differentialgleichung*, und
- einem Satz von *Anfangs- und/oder Randbedingungen*,

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Existenz: Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt;
2. Eindeutigkeit: Die Lösung ist eindeutig;
3. Stabilität: Die Lösung hängt stetig von den Anfangs-/Randbedingungen ab
   d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

3

Beispiel: (Korrekt gestellte Wellengleichung)
Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{in } [0,\infty[\times\mathbb{R} && (1)\\ u &= f \quad \text{auf } \{t=0\}\times\mathbb{R} && (2)\\ u_t &= g \quad \text{auf } \{t=0\}\times\mathbb{R} && (3) \end{aligned}$$

ist ein wohlgestelltes hyperbolisches Problem.

- Die eindeutig bestimmte Lösung ist gegeben durch die Lösungsdarstellung von d'Alembert:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz\right).$$

- Die Lösung hängt stetig von den Daten ab, denn es gilt

$$\|u-\tilde{u}\|_\infty \le \|f-\tilde{f}\|_\infty + t\|g-\tilde{g}\|_\infty.$$

Beispiel: (Hadamard)
Das Anfangswertproblem für die PDG

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$$u = f \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \tag{2}$$

$$u_y = g \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \tag{3}$$

ist kein wohlgestelltes elliptisches Problem!

Begründung:

- Setze $f(x) = g(x) = 0$, So ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$u(x, y) = 0.$$

- Andererseits, falls $f_n(x) = 0$ und $g_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$, für $n \in \mathbb{N}$, so ist die Lösung

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^2}\sin(nx)\sinh(ny)$$

- Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g_n = g = 0$$

- Aber wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sinh(ny) = \infty$ $(y \neq 0)$, erhält man

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq u,$$

die Lösung hängt also nicht stetig von den Daten ab!

Beispiel: (Laplace-Gleichung)
Das Randwertproblem für die zweidimensionale Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad \text{in } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ u &= g \quad \text{auf } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \end{aligned}$$

ist ein korrekt gestelltes elliptisches Problem.
Die Lösung (eindeutig) ist durch die Poissonsche Integralformel gegeben:

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \oint_{\|\mathbf{z}\|=1} \frac{g(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2} ds$$

Klassifikation

Normalformen

Diagonalform

Differentialgleichungen II

Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Wohlgestelltheit

Definition

Definition: (PDG 2. Ordnung)
Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.
Den ersten Term der Gleichung nennt man den Hauptteil der PDG.
Es gelte o.B.d.A.

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Spezialfall: Falls $a_{ij} = \text{const.}$ für $i, j = 1, \ldots, n$, so lässt sich die PDG in Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^T A \nabla) u + (\mathbf{b}^T \nabla) u + fu = g,$$

mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ symmetrische Matrix und $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.