Differentialgleichungen II

Woche 04 / J. Behrens

① **Satz**: (Verdünnungswelle)
Sei das Riemann Problem mit der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ in $\mathbb{R}\times]0,\infty[$ und $u(x,t=0) = x_0$ gegeben. Es sei

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{mit } u_l < u_r.$$

Dann ist die Verdünnungswelle gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x < f'(u_l)t \\ g(\frac{x}{t}) & : \quad f'(u_l)t \leq x \leq f'(u_r)t \\ u_r & : \quad x > f'(u_r)t \end{cases} \qquad g = (f')^{-1}$$

eine Integrallösung des Riemann Problems.
Bemerkung: Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine stetige Funktion. 1

Beweis "Verdünnungswelle":

- Stetigkeit: Kritischen Punkte $x = \begin{cases} f'(u_l)t \\ f'(u_r)t \end{cases}$

Für $x < f'(u_l)t \rightarrow u(x,t) = u_l$ stetig

$x > f'(u_r)t \rightarrow u(x,t) = u_r$ stetig

$f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \rightarrow g(\frac{x}{t}) = \frac{1}{f'(\frac{x}{t})}$ stetig nach Annahme

Es gilt: $g\left(\frac{f'(u_l)t}{t}\right) = g(f'(u_l)) = (f')^{-1}(f'(u_l)) = u_l$

analog für $f'(u_r)\cdot t$.

$\Rightarrow$ Stetigkeit.

∘ Lösung der Erhaltungsgleichung

i) Für $x < f'(u_l)t$ ist $u(x,t)$ konstant, daher löst $u(x,t)$ die Erhaltungsgleichung.

ii) Für $x > f'(u_r)t$ gilt analog Lösung.

iii) Für $f'(u_l)t \leq x \leq f'(u_r)t$ gilt:

$$u_t = \frac{x}{t^2}\, g'\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$f_x(u) = f\left(g\left(\frac{x}{t}\right)\right)_x = f'\underbrace{\left(g\left(\frac{x}{t}\right)\right)}_{\frac{x}{t}} \frac{g'\left(\frac{x}{t}\right)}{t} = \frac{x}{t^2}\, g'\left(\frac{x}{t}\right)$$

$\Rightarrow g\left(\frac{x}{t}\right)$ löst $u_t + f(u)_x = 0$

Fazit: u in der Form oben ist stetige schwache Lösung.

2 **Beispiel**: Betrachte das Riemann Problem der Burgers Gleichung mit Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

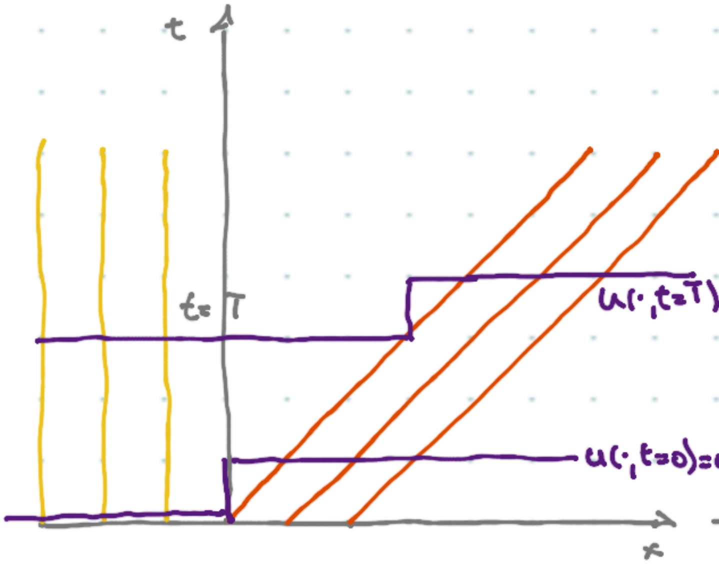
Es gelten die beiden Integrallösungen

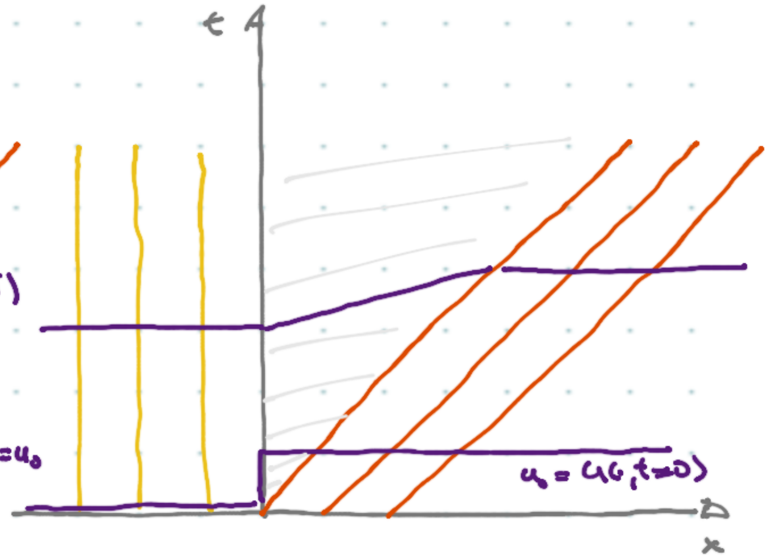
$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq \frac{t}{2} \\ 1 & : \quad x > \frac{t}{2} \end{cases} \qquad \text{(Stoßwelle)}$$

und

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ \frac{x}{t} & : \quad 0 \leq x \leq t \\ 1 & : \quad x > t \end{cases} \qquad \text{(Verdünnungswelle)}$$

2



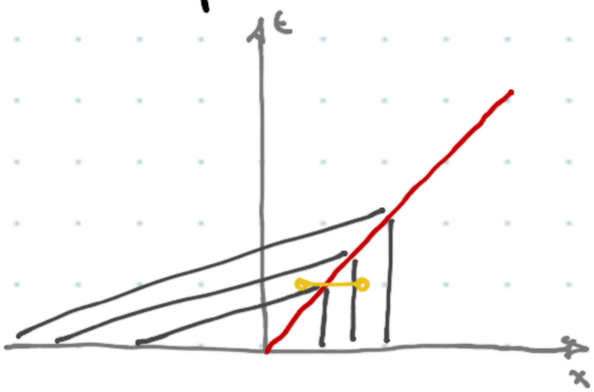


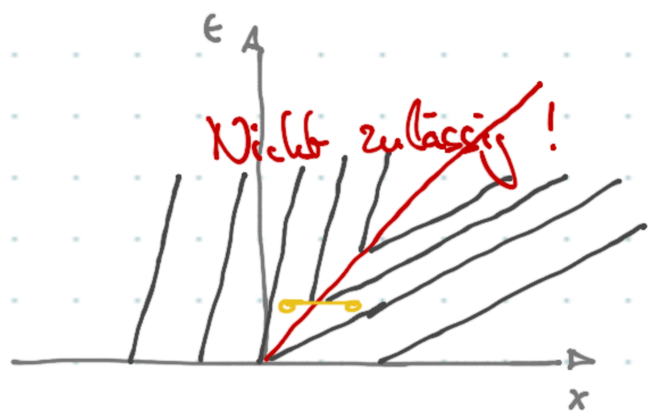
3

Definition: (Entropiebedingung)
Eine Integrallösung heißt Entropielösung, falls die Lösung die folgende Entropiebedingung oder Lax-Oleinik-Bedingung erfüllt:
Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt:

$$\underline{u(t, x+z) - u(t, x)} < \frac{C}{t} z.$$

Unstetigkeit ist zulässig (entropisch), falls die Charakteristiken "hinein laufen"





<u>Insbesondere</u> $f'(u_l) > \dot{s} > f'(u_r)$

Burgers Gleichung: $f'(u) = u \quad \longrightarrow \quad u_l > \dot{s} > u_r$

Wenn die Charakteristiken nicht "hinein laufen" $\longrightarrow$ Verdünnungswelle