Differentialgleichungen II

Charakteristiken-Methode für
nichtlineare Gleichungen

Erinnerung

Definition: (Charakteristisches Differentialgleichungssystem)
Sei die skalare lineare homogene PDG 1. Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

gegeben. Dann heißt das autonome System gewöhnlicher DGL

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

das charakteristische Differentialgleichungssystem der PDG.
Lösungsverfahren, die das charakteristische DGL-System verwenden, heißen Charakteristiken-Verfahren.

Bemerkungen: (Charakteristiken-Verfahren)

- Mit Hilfe des charakteristischen DGL-Sytems (charDGLS) ergibt sich sofort:

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}(t)) u_{x_i}(\mathbf{x}(t)) = 0$$

  und damit $u(\mathbf{x}(t)) = \text{const.}$. Diese Lösung heißt erstes Integral.

- Die Lösungsmethode lässt sich auf quasilineare inhomogene PDG

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

  erweitern, indem man das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

  für $U = U(\mathbf{x}, u)$ betrachtet.

Definition: (Cauchy-Problem)
Für zeitabhängige Gleichungen mit Zeitvariable $t \in I = [0, \infty[$ und Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ betrachtet man das auf ganz $\mathbb{R}^n \times I$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} &= b(\mathbf{x}, t, u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times I \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Dieses Problem nennt man Cauchy-Problem.

Beispiel: (Transportgleichung)
Die Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u &= u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

mit $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times I$ besitzt das charDGLS

$$\dot{t}(\tau) = 1, \ \dot{x}_1(\tau) = a_1, \ldots, \dot{x}_n(\tau) = a_n.$$

Mit $t = \tau$ bleiben die n Gleichungen $\dot{x}_i(t) = a_i$. Die Lösung ist also ein lineares System der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t.$$

Auflösung nach $\mathbf{x}_0$ und Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt als Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t).$$

Definition: (Charakteristisches Differentialgleichungssystem)
Sei die skalare lineare homogene PDG 1. Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

gegeben. Dann heißt das autonome System gewöhnlicher DGL

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

das charakteristische Differentialgleichungssystem der PDG.
Lösungsverfahren, die das charakteristische DGL-System verwenden, heißen Charakteristiken-Verfahren.

Bemerkungen: (Charakteristiken-Verfahren)

- Mit Hilfe des charakteristischen DGL-Sytems (charDGLS) ergibt sich sofort:

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}(t))u_{x_i}(\mathbf{x}(t)) = 0$$

  und damit $u(\mathbf{x}(t)) = \mathrm{const.}$. Diese Lösung heißt erstes Integral.

- Die Lösungsmethode lässt sich auf quasilineare inhomogene PDG

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

  erweitern, indem man das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u)U_u = 0$$

  für $U = U(\mathbf{x}, u)$ betrachtet.

Definition: (Cauchy-Problem)
Für zeitabhängige Gleichungen mit Zeitvariable $t \in I = [0, \infty[$ und Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ betrachtet man das auf ganz $\mathbb{R}^n \times I$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} &= b(\mathbf{x}, t, u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times I \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Dieses Problem nennt man Cauchy-Problem.

Beispiel: (Transportgleichung)
Die Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u &= u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

mit $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times I$ besitzt das charDGLS

$$\dot{t}(\tau) = 1,\ \dot{x}_1(\tau) = a_1, \ldots, \dot{x}_n(\tau) = a_n.$$

Mit $t = \tau$ bleiben die n Gleichungen $\dot{x}_i(t) = a_i$. Die Lösung ist also ein lineares System der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t.$$

Auflösung nach $\mathbf{x}_0$ und Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt als Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t).$$

Burgers Gleichung

Beispiel:
Gegenüber der Transportgleichung erhöhen wir die Komplexität leicht, indem wir $\mathbf{a} = t\mathbf{x}$ wählen. Dafür betrachten wir die Gleichung nun in $\mathbb{R} \times I$:

$$\begin{aligned} u_t + txu_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u(x,0) &= \sin(x) && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

- Charakteristische Gleichung: $\dot{x} = tx$, $x(0) = x_0$.
- Lösung der Charakteristischen Gleichung: $x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$
- Lösung des AWP: $u(x,t) = \sin\left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]$.

Beispiel: (nichtlineare skalare Erhaltungsgleichung)
Das folgende Cauchy-Problem repräsentiert eine nichtlineare skalare Erhaltungsgleichung in einer Raumdimension.

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

- $f = f(u)$ gegeben, heißt Flussfunktion.
- Diese PDG ist quasi-linear, weil sie geschrieben werden kann als

$$u_t + a(u)u_x = 0$$

  mit $a(u) = f'(u)$.
- $a(u)$ heißt auch lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit. 1

Beispiel: (Burgers Gleichung)
Die Burgers Gleichung ist gegeben durch die Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$, bzw. durch das Cauchy-Problem


Jan M. Burgers (1895-1981)

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

- Die Lösung ist gegeben durch $u(t) = x_0 + tu_0(x_0)$.
- Falls u_0 gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0 \\ 1 - x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

  dann entwickelt $x(t)$ für $t \to 1$ eine Singularität.
- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert nur lokal für $0 \leq t < 1$.
- Die lokale Lösung lautet für $t \in [0,1[$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < 1 \\ \frac{(1-x)}{(1-t)} & : \quad 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

Fazit: Die skalare Erhaltungsgleichung, gegeben durch das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

hat im Allgemeinen keine globale Lösung.

Frage: was geschieht für $t \geq 1$, also nach der Singularität?

Beispiel:
Gegenüber der Transportgleichung erhöhen wir die Komplexität leicht, indem wir $\mathbf{a} = t\mathbf{x}$ wählen. Dafür betrachten wir die Gleichung nun in $\mathbb{R} \times I$:

$$\begin{aligned} u_t + txu_x = &\quad 0 && \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u(x,0) = &\quad \sin(x) && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{aligned}$$

- Charakteristische Gleichung: $\dot{x} = tx$, $x(0) = x_0$.
- Lösung der Charakteristischen Gleichung: $x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$
- Lösung des AWP: $u(x,t) = \sin\left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]$.

Beispiel: (nichtlineare skalare Erhaltungsgleichung)
Das folgende Cauchy-Problem repräsentiert eine nichtlineare skalare Erhaltungsgleichung in einer Raumdimension.

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x = &\quad 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u = &\quad u_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$

- $f = f(u)$ gegeben, heißt Flussfunktion.
- Diese PDG ist quasi-linear, weil sie geschrieben werden kann als

$$u_t + a(u)u_x = 0$$

  mit $a(u) = f'(u)$.
- $a(u)$ heißt auch lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit. 1

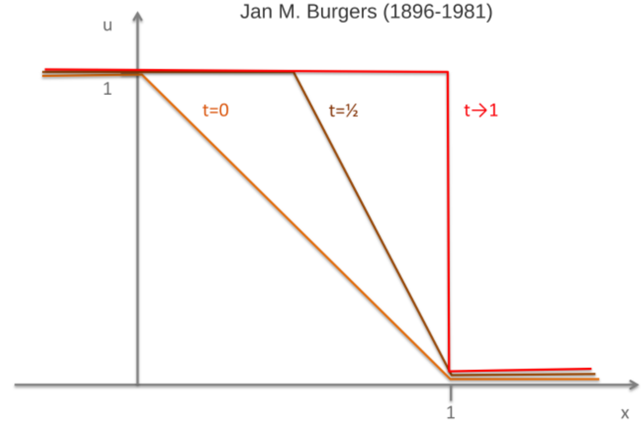
Beispiel: (Burgers Gleichung)

Die Burgers Gleichung ist gegeben durch die Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$, bzw. durch das Cauchy-Problem

http://www.inghist.nl/Onderzoek/Projecten/BWN/lemmata/bwn5/burgers

Jan M. Burgers (1896-1981)

$$\begin{aligned} u_t + u u_x = &\quad 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u = &\quad u_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$



- Die Lösung ist gegeben durch $u(t) = x_0 + t u_0(x_0)$.
- Falls u_0 gegeben ist durch

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \le 0 \\ 1-x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \ge 1 \end{cases}$$

  dann entwickelt $x(t)$ für $t \to 1$ eine Singularität.
- Eine klassische Lösung der Burgers Gleichung existiert nur lokal für $0 \le t < 1$.
- Die lokale Lösung lautet für $t \in [0,1[$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < 1 \\ \frac{(1-x)}{(1-t)} & : \quad 0 \le t \le x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

Fazit: Die skalare Erhaltungsgleichung, gegeben durch das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x = &\quad 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u = &\quad u_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$

hat im Allgemeinen keine globale Lösung.

Frage: was geschieht für $t \geq 1$, also nach der Singularität?

Allgemeine skalare Erhaltungsgleichung

Definition: (kompakter Träger)
Der Träger einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\operatorname{tr}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Ist $\operatorname{tr}(f)$ eine kompakte Menge, so sprechen wir von einer Funktion mit kompaktem Träger.

2

Satz: (Rankine-Hugoniot Bedingung)
Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}(t)$ die Rankine-Hugoniot Bedingung

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-,t)) - f(u(s(t)^+,t))}{u(s(t)^-,t) - u(s(t)^+,t)} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

4

Bemerkung: (Testfunktion)

- Sei $v : \mathbb{R} \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ diff'bare Funktion mit kompaktem Träger.
- Betrachte die skalare Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, multipliziere mit v und integriere:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x) v \; dx dt \\ &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t \; dx dt - \int_{-\infty}^\infty u(x,0) v(x,0) \; dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x \; dx dt. \end{aligned}$$

- Mit Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x) \; dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) \; dx = 0.$$

- Eine solche Funktion v heißt Testfunktion.

Definition: (Stoßwellenlösung)
Eine Stoßwellenlösung u ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0$$

wenn eine Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, so dass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PGD ist und u bei $x = s(t)$ ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+,t) - u(s(t)^-,t) = u_r - u_l$$

besitzt. $\dot{s}(t)$ heißt Stoßgeschwindigkeit.

Definition: (schwache Lösung)
Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty[)$ heißt Integrallösung oder schwache Lösung der Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, falls für alle Testfunktionen v gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x) \; dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) \; dx = 0.$$

Definition: (Riemannproblem)
Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times]0,\infty[\\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit unstetigen Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \; x \leq 0 \\ u_r & : \; x > 0 \end{cases}$$

heißt Riemannproblem für die skalare Erhaltungsgleichung. 3

Definition: (kompakter Träger)
Der Träger einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\mathrm{tr}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Ist $\mathrm{tr}(f)$ eine kompakte Menge, so sprechen wir von einer Funktion mit kompaktem Träger.

2

Bemerkung:

- Es gibt viele diff'bare Funktionen mit kompaktem Träger.
- Sie sind wichtig für die Theorie und Numerik partieller DGL.

Bemerkung: (Testfunktion)

- Sei $v : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ diff'bare Funktion mit kompaktem Träger.
- Betrachte die skalare Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, multipliziere mit v und integriere:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x) v \; dxdt \\ &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t \; dxdt - \int_{-\infty}^\infty u(x,0) v(x,0) \; dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x \; dxdt. \end{aligned}$$

- Mit Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x) \; dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) \; dx = 0.$$

- Eine solche Funktion v heißt Testfunktion.

Definition: (schwache Lösung)
Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ heißt Integrallösung oder schwache Lösung der Erhaltungsgleichung $u_t + f(u)_x = 0$, falls für alle Testfunktionen v gilt:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x)\ dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x,0)\ dx = 0.$$

Bemerkung:

- Eine Integrallösung muss keine differenzierbare Funktion sein!
- Sie kann sogar Sprungstellen besitzen.

Definition: (Riemannproblem)
Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= \quad 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u &= \quad u_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{aligned}$$

mit unstetigen Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

heißt Riemannproblem für die skalare Erhaltungsgleichung. 3

Definition: (Stoßwellenlösung)
Eine Stoßwellenlösung u ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0$$

wenn eine Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, so dass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PGD ist und u bei $x = s(t)$ ein Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t) = u_r - u_l$$

besitzt. $\dot{s}(t)$ heißt Stoßgeschwindigkeit.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/55/William_Rankine_1870s3.jpg

W.J.Macquorn Rankine (1820-1872)

Pierre-Henri Hugoniot (1851-1887)

Satz: (Rankine-Hugoniot Bedingung)
Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}(t)$ die Rankine-Hugoniot Bedingung

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t))}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Allgemeine skalare Erhaltungsgleichung

Differentialgleichungen II

Burgers Gleichung

Erinnerung

Definition: (Charakteristisches Differentialgleichungssystem)
Sei die skalare lineare homogene PDG 1. Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

gegeben. Dann heißt das autonome System gewöhnlicher DGL

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

das charakteristische Differentialgleichungssystem der PDG.
Lösungsverfahren, die das charakteristische DGL-System verwenden, heißen Charakteristiken-Verfahren.

Definition: (Cauchy-Problem)
Für zeitabhängige Gleichungen mit Zeitvariable $t \in I = [0, \infty]$ und Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ betrachtet man das auf ganz $\mathbb{R}^n \times I$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} &= b(\mathbf{x}, t, u) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times I \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

Dieses Problem nennt man Cauchy-Problem.