Differentialgleichungen II

19. 04. 2022 / J. Behrens

Woche 02

① Beispiel:

- Betrachte: $\quad x\,u_x + y\,u_y + (x^2+y^2)\,u_z = 0$
- Charakteristisches System:
$$\dot{x} = x$$
$$\dot{y} = y$$
$$\dot{z} = (x^2+y^2)$$
- Allgemeine Lösung:
$$x(t) = c_1 e^t$$
$$y(t) = c_2 e^t$$
$$z(t) = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3$$
- Damit: $u(x(t), y(t), z(t)) = u(c_1 e^t, c_2 e^t, \frac{1}{2}(c_1^2+c_2^2)e^{2t} + c_3) = \text{konst.}$
- Es gilt: $e^t = \frac{x(t)}{c_1} = \frac{y(t)}{c_2} \Rightarrow \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_2}{c_1} = c \in \mathbb{R}$

  und: $z(t) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + c_3 \Rightarrow z(t) - \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) = d \in \mathbb{R}$

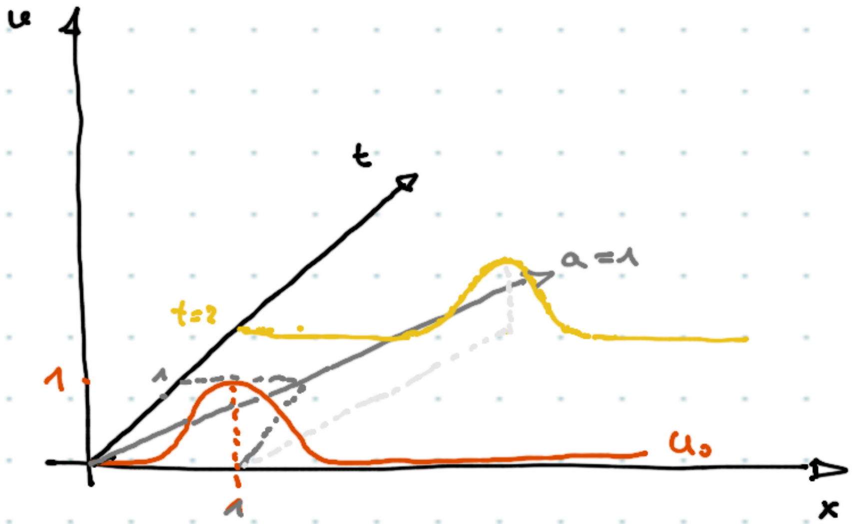
Also: nur c und d definieren den Wert von u entlang der charakt. Kurven.

- Lösungsdarstellung: $u(x,y,z) = \phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$

für beliebige C^1-Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

② Interpretation der Transportgleichung

• Lösung: $u(x,t) = u_0(x - at)$



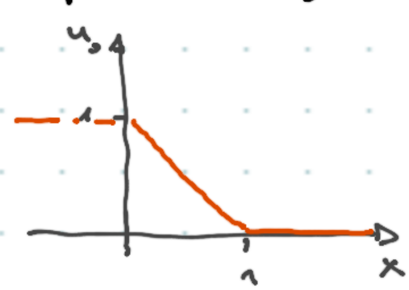
Woche 03

① Burgers Gleichung

• Betrachte Cauchy-Problem mit Flussfunktion $f(u) = \frac{u^2}{2}$

$$u_t + f(u)_x = u_t + u \cdot u_x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times]0,\infty[$$
$$u = u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}$$

• Anfangsbedingungen: $u_0 = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases}$



• Löse mit Meth. der Charakt.

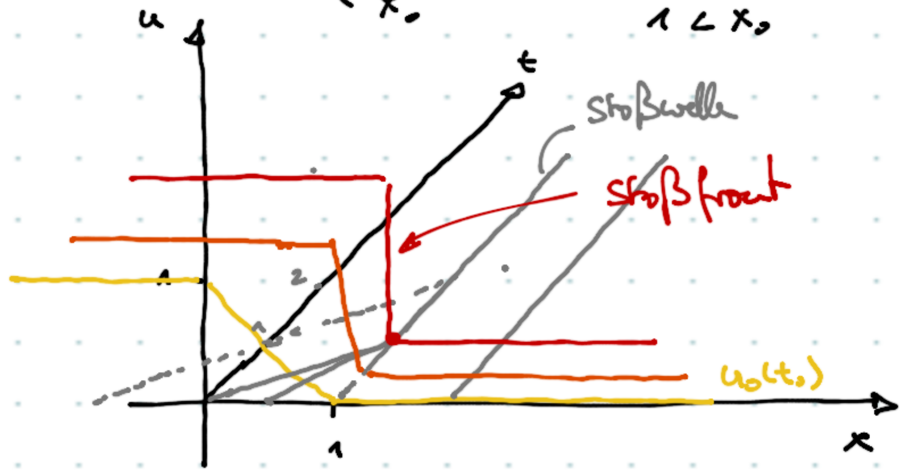
$$\dot{x} = u \ , \ x(0) = x_0$$

• Die Lösung bleibt entlang der Kurve $x(t)$ konstant, d.h.

$$\dot{x} = u_0(x_0) \Rightarrow x(t) = x_0 + t\, u_0(x_0)$$

• Einsetzen in gegebenes u_0:

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & x \leq 0 \\ (1-x_0)t + x_0 & 0 < x_0 < 1 \\ x_0 & 1 < x_0 \end{cases}$$



② Testfunktion bzw. Integrallösung

• Sei $v : \mathbb{R} \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ diff'bare Funktion mit kompaktem Träger

• Problem $u_t + f(u)_x = 0$ in $\mathbb{R} \times]0,\infty[$ mit $u = u_0$ auf $\mathbb{R} \times \{t=0\}$.

• Multipliziere mit v und integriere:

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x)\, v \, dx\, dt$$

$$= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u\, v_t \, dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty \cancel{u(x,\infty)\, \underbrace{v(x,\infty)}_{}}\, dx + \int_{-\infty}^\infty \underbrace{u(x,0)}_{u_0(x)}\, v(x,0)\, dx$$

$$- \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)\, v_x \, dx\,dt + \int_0^\infty \cancel{u(\infty,t)\, \underbrace{v(\infty,t)}_{=0}}^{\text{Kompakt} \Rightarrow 0}\, dt + \int_0^\infty \cancel{u(-\infty,t)\, \underbrace{v(-\infty,t)}_{=0}}\, dt$$

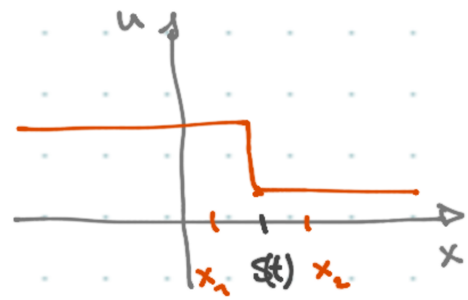
$$= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t \, dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0)\, dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x \, dx\,dt$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x)\, dx\,dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0)\, dx$$

④ Herleitung der Rankine-Hugoniot-Bedingung

- Eine Integrallösung erfüllt:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(\xi,t)\, d\xi = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$



- Wähle $x_1 < s(t) < x_2$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{s(t)} u(\xi,t)\, d\xi + \int_{s(t)}^{x_2} u(\xi,t)\, d\xi \right) = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

- Nun ist u rechts und links von s(t) diff'bar

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{s(t)} \frac{du}{dt}\, d\xi + \dot{s}\, u(s(t)^-,t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{du}{dt}\, d\xi - \dot{s}\, u(s(t)^+,t) + f_2 - f_1 = 0$$

mit $f_2 = f(u(x_2,t))$ und $f_1 = f(u(x_1,t))$.

- Grenzübergang $x_1 \to s(t)^-$ und $x_2 \to s(t)^+$ $\Rightarrow$ Integrale verschwinden

$$\Rightarrow \underbrace{\dot{s}\, \underbrace{u(s(t)^-,t)}_{u_l} - \dot{s}\, \underbrace{u(s(t)^+,t)}_{u_r}}_{[u]} = \underbrace{f(\underbrace{u(s(t)^-,t)}_{f_l}) - f(\underbrace{u(s(t)^+,t)}_{f_r})}_{[f]}$$

$$\Rightarrow \dot{s} = \frac{[f]}{[u]}$$

$\boxtimes$