Differentialgleichungen II

Charakteristikenmethode

Erinnerung

Definition: (Partielle Differentialgleichung)
Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_1}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p-1} x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_n}\right) = \mathbf{0}$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt ein System partieller Differentialgleichungen (PDG oder PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p-ter Ordnung $\left(\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p_1} x_1 \cdots \partial^{p_n} x_n}\right)$ explizit auf, so spricht man von einer PDG der Ordnung p.

Theorem: (Reynoldscher Transportsatz)
Für eine beliebige differenziertere, skalare Funktion $F : D_t \times [0, T] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla \cdot (f\mathbf{v})\right](\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}.$$

Erinnere: $\operatorname{div} \mathbf{y} = \nabla \cdot \mathbf{y}$.

Definition: (lineare/nichtlineare PDG)

1. Eine PDG heißt linear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\mathbf{u}$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.
2. Eine PDG heißt semilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist und die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ abhängen.
3. Eine PDG heißt quasilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\mathbf{x}, \mathbf{u}$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}$ abhängen.
4. In allen anderen Fällen heißt die PDG nichtlinear.

Definition: (Partielle Differentialgleichung)
Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_1}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p-1} x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_n}\right) = \mathbf{0}$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt ein System partieller Differentialgleichungen (PDG oder PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p-ter Ordnung ($\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p_1} x_1 \cdots \partial^{p_n} x_n}$) explizit auf, so spricht man von einer PDG der Ordnung p.

Definition: (lineare/nichtlineare PDG)

1. Eine PDG heißt linear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.

2. Eine PDG heißt semilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist und die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ abhängen.

3. Eine PDG heißt quasilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}$ abhängen.

4. In allen anderen Fällen heißt die PDG nichtlinear.

Theorem: (Reynoldscher Transportsatz)
Für eine beliebige differenziertere, skalare Funktion $F : D_t \times [0, T] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}.$$

Erinnere: $\operatorname{div} \mathbf{y} = \nabla \cdot \mathbf{y}$.

Vorüberlegungen Charakteristikenmethode

Ziel: Lösung der skalaren quasilinearen PDG 1. Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Lösungsmethode: Charakteristikenmethode.

Betrachte zunächst: Homogene lineare PDG 1. Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Definition: Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

mit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$, heißt das charakteristische Differentialgleichungssystem der homogenen linearen PDG 1. Ordnung.

Beobachtung: Mit der charakteristischen DGL gilt:

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} x_i(t) \cdot u_{x_i}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}(t)) u_{x_i}(\mathbf{x}(t)).$$

Da die rechte Seite aber gleich Null ist folgt:

Bemerkung: Die Funktion $u(\mathbf{x})$ ist genau dann Lösung der PDG, wenn u entlang jeder Lösung $\mathbf{x}(t)$ des charakteristischen DGL-Systems konstant ist, d.h.

$$u(\mathbf{x}(t)) = \text{const.}$$

Definition: Die Lösung $u(\mathbf{x})$ heißt erstes Integral des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Methode der Charakteristiken ist eine Zurückführung der PDG auf gewöhnliche DGLn.

1

Ziel: Lösung der skalaren quasilinearen PDG 1. Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Lösungsmethode: Charakteristikenmethode.

Betrachte zunächst: Homogene lineare PDG 1. Ordnung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Definition: Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

mit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$, heißt das charakteristische Differentialgleichungssystem der homogenen linearen PDG 1. Ordnung.

Beobachtung: Mit der charakteristischen DGL gilt:

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}x_i(t) \cdot u_{x_i}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}(t))u_{x_i}(\mathbf{x}(t)).$$

Da die rechte Seite aber gleich Null ist folgt:

Bemerkung: Die Funktion $u(\mathbf{x})$ ist genau dann Lösung der PDG, wenn u entlang jeder Lösung $\mathbf{x}(t)$ des charakteristischen DGL-Systems konstant ist, d.h.

$$u(\mathbf{x}(t)) \equiv \text{const.}$$

Definition: Die Lösung $u(\mathbf{x})$ heißt erstes Integral des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Methode der Charakteristiken ist eine Zurückführung der PDG auf gewöhnliche DGLn.

1

Quasilineare Inhomogene PDG

Ziel: Anwendung der Charakteristikenmethode auf die inhomogene quasilineare PDG

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Idee: Betrachte das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der unbekannten Funktion $U = U(\mathbf{x}, u)$ von $(n+1)$ unabhängigen Variablen $\mathbf{x}$ und u.

Beobachtung:
Im Gegensatz zu linearen PDG erhält man bei quasilinearen PDG
keine explizite Lösungsdarstellung
und die Lösung existiert ggfls. nur local.

Beispiel. Gesucht ist die Lösung von

$$(1+x)u_x - (1+y)u_y = y - x.$$

- Erweitertes Problem:

$$(1+x)U_x - (1+y)U_y + (y-x)U_u = 0.$$

- Charakteristisches DGL-System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + x \\ \dot{y} &= -(1+y) \\ \dot{u} &= y - x \end{aligned}$$

- Allgemeines Lösung für gew. DGL:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t - 1 \\ y(t) &= c_2 e^{-t} - 1 \\ u(t) &= c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^t \end{aligned}$$

- Eliminiere t:

$$e^t = \frac{x+1}{c_1} = \frac{c_2}{y+1} \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y+1) = c_1 \cdot c_2 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \quad \Rightarrow \quad u + x + y = d \in \mathbb{R}.$$

- Die beiden Konstanten c und d bestimmen das Lösungsverhalten. Es folgt die implizite Lösungsdarstellung

$$\Phi((x+1)(y+1), (u+x+y)) = 0$$

mit beliebiger C^1-Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ziel: Anwendung der Charakteristikenmethode auf die inhomogene quasilineare PDG

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Idee: Betrachte das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der unbekannten Funktion $U = U(\mathbf{x}, u)$ von $(n+1)$ unabhängigen Variablen $\mathbf{x}$ und u.

Behauptung: Ist $U(\mathbf{x}, u)$ eine Lösung mit $U_u \neq 0$, so ist durch $U(\mathbf{x}, u) = 0$ implizit eine Lösung $u = u(\mathbf{x})$ des Ausgangsproblems gegeben.

Beweis:

- Gilt $U_u \neq 0$, so lässt sich $U(\mathbf{x}, u)$ nach dem Satz über implizite Funktionen nach $u(\mathbf{x})$ auflösen.
- Wegen $U(\mathbf{x}, u) = 0$ gilt dann

$$U_{x_i} + U_u u_{x_i} = 0.$$

- Weiter gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

- Daraus folgt mit der obigen Gleichung

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} \right) U_u + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

- Schließlich gilt für $U_u \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u)$$

Beispiel: Gesucht ist die Lösung von

$$(1+x)u_x - (1+y)u_y = y - x.$$

- Erweitertes Problem:

$$(1+x)U_x - (1+y)U_y + (y-x)U_u = 0.$$

- Charakteristisches DGL-System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1+x \\ \dot{y} &= -(1+y) \\ \dot{u} &= y-x \end{aligned}$$

- Allgemeines Lösung für gew. DGL:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t - 1 \\ y(t) &= c_2 e^{-t} - 1 \\ u(t) &= c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^t \end{aligned}$$

- Eliminiere t:

$$e^t = \frac{x+1}{c_1} = \frac{c_2}{y+1} \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y+1) = c_1 \cdot c_2 = c \in \mathbb{R}$$

  und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \quad \Rightarrow \quad u + x + y = d \in \mathbb{R}.$$

- Die beiden Konstanten c und d bestimmen das Lösungsverhalten. Es folgt die implizite Lösungsdarstellung

$$\Phi((x+1)(y+1), (u+x+y)) = 0$$

  mit beliebiger C^1-Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Beobachtung:
Im Gegensatz zu linearen PDG erhält man bei quasilinearen PDG keine explizite Lösungsdarstellung
und die Lösung existiert ggfls. nur local.

Anfangswertprobleme

Vorbemerkung: Betrachte den in Anwendungen häufigen Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.

Interpretation:
Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ transportiert, ohne seine Form zu ändern.

Beispiel:
Verwende Charakteristikenmethode zur Lösung der Transportgleichung

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \ \text{const.} \equiv \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Lösung: Man erhält die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t).$$

2

Vorbemerkung: Betrachte den in Anwendungen häufigen Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$.

Definition (Cauchy-Problem):
Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

heißt Cauchy-Problem.

Bemerkung (Anfangsbedingung):
Zur Zeit $t = 0$ ist die Anfangsbedingung

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben.

Beispiel:
Verwende Charakteristikenmethode zur Lösung der Transportgleichung

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \text{ const.} \equiv \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Lösung: Man erhält die Lösungsdarstellung

2

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t).$$

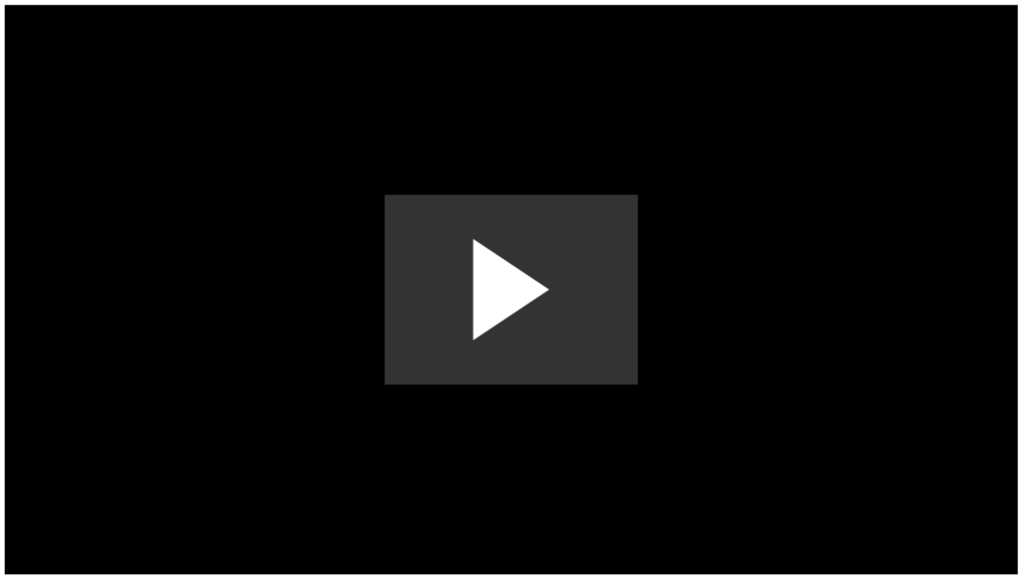
Probe:
Mit $u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$ gilt

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{a}\nabla u_0, \quad \nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla u_0$$

Damit folgt

$$u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0.$$

Interpretation:
Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ transportiert, ohne seine Form zu ändern.



Vorüberlegungen Charakteristikenmethode

Erinnerung

Differentialgleichungen II

Quasilineare Inhomogene PDG

Anfangswertprobleme