Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2022**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\,3),\ t > 0,\\
&u(x,0) = 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
&u_t(x,0) = \frac{x}{3} && x \in (0,3),\\
&u(0,t) = e^{-t} && t \geq 0,\\
&u(3,t) = 1 && t \geq 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randdaten gemäß

$$v = u - e^{-t} - \frac{x}{3}(1 - e^{-t})$$

zur folgenden Anfangsrandwertaufgabe für v führt:

$$\begin{aligned}
&v_{tt} - 4v_{xx} = 0 && x \in (0,\,3),\ t > 0,\\
&v(x,0) = 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
&v_t(x,0) = 1 && x \in (0,3),\\
&v(0,t) = 0 && t \geq 0,\\
&v(3,t) = 0 && t \geq 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil a) und geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (1) an.

Aufgabe 2:

Zur numerischen Lösung einer Differentialgleichung für $u(x,t)$, $x \in]0,(n+1)\Delta x[, t > 0$ mit vorgegebenen Anfangsdaten für $t = 0$ und Randdaten für $x = 0$ und $x = (n+1)\Delta x$ sei das Gitter

$$x_j = j \cdot \Delta x, \qquad j = 0, 1, \ldots, n+1, \qquad\qquad t_m = m \cdot \Delta t, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

definiert. u_j^m sie eine Näherung für $u(x_j, t_m)$.

Welche Differentialgleichungen werden durch folgende Differenzengleichungen ergänzt mit geeigneten Anfangsdaten ($m = 0$) und Randdaten ($j = 0$ bzw. $j = n+1$) approximiert?

Für $j = 0, \ldots, N$ und $m = 1, 2, 3 \ldots$:

a) $$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + c\,\frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x} = 0,$$

b) $$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + c\,\frac{u_j^{m+1} - u_{j-1}^{m+1}}{\Delta x} = 0,$$

c) $$\frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{\Delta t^2} = \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{\Delta x^2},$$

d) $$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} = \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}$$

e) $$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + c\,\frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x} = \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{\Delta x^2}$$

Bei welchen Differenzengleichungen kann man die Daten auf der Zeitstufe $m+1$ bei Kenntnis der Daten auf der Zeitstufe m direkt berechnen. Bei welchen Verfahren handelt es sich also um ein explizites Verfahren?

Bearbeitung: 11.07.-15.07.2022