Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2022**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Aus der Vorlesung 9 kennen Sie die Formel von d'Alembert

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\,(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\,d\alpha$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe für die (homogene) Wellengleichung

$$\hat{u}_{tt} - c^2\hat{u}_{xx} = 0,\;\; \hat{u}(x,0) = f(x),\;\; \hat{u}_t(x,0) = g(x),\;\; x \in \mathbb{R},\, c > 0.$$

Die Funktion

$$\tilde{u}(x,t) \;=\; \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

löst die folgende Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} \;-\; c^2\tilde{u}_{xx} \;=\; h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) \;=\; \tilde{u}_t(x,0) \;=\; 0\,. \tag{2}$$

(Beweis: Leibniz-Formel für die Ableitung parameterabhängiger Integrale)

Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &u_{tt} \;-\; 4u_{xx} \;=\; 6x\sin t, && x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ &u(x,0) \;=\; x,\, x \in \mathbb{R}, && u_t(x,0) \;=\; \sin(x),\, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie eine Lösung $\hat{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\hat{u}_{tt} \;-\; 4\hat{u}_{xx} \;=\; 0, && x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ &\hat{u}(x,0) \;=\; x,\, x \in \mathbb{R}, && \hat{u}_t(x,0) \;=\; \sin(x),\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie eine Lösung $\tilde{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_{tt} \;-\; 4\tilde{u}_{xx} \;=\; 6x\sin t, && x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ &\tilde{u}(x,0) \;=\; 0,\, x \in \mathbb{R}, && \tilde{u}_t(x,0) \;=\; 0,\, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie durch Einsetzen von u in die Differentialgleichung und Überprüfung der Anfangswerte, dass $u = \tilde{u} + \hat{u}$ die Anfangswertaufgabe (2) löst.

Aufgabe 2:

a) Leiten Sie mit Hilfe eines Produktansatzes die in der Vorlesung 10 (Seite 18) gegebene Reihendarstellung für die Lösung des folgenden Neumann Problems her.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 & t > 0. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 2\pi x - \sin(2\pi x)$.

Tipp: $2\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$.

Bearbeitung: 30.05.-03.06.2022