

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, & \text{auf } \mathbb{R}^2, \\u(x, 0) &= 2 \sin(4\pi x) & x \in \mathbb{R}, \\u_t(x, 0) &= \cos(\pi x) & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- b) Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned}u_{tt} &= 9u_{xx}, & \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\u(x, 0) &= f(x) = \begin{cases} 2 & -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\u_t(x, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Lösung, die man mit der Formel von d'Alembert erhält für $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die folgende Aufgabe für $u(x, y, t)$.

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + u_{yy}, & x, y \in (0, \pi), t > 0, \\u(0, y, t) &= u(\pi, y, t) = 0, & \text{für } y \in (0, \pi), t > 0, \\u(x, 0, t) &= u(x, \pi, t) = 0, & \text{für } x \in (0, \pi), t > 0, \\u(x, y, 0) &= \frac{1}{2} (\sin(2x) + \sin(x)) \sin(y) & \text{für } x, y \in (0, \pi).\end{aligned}$$

- a) Leiten Sie mit Hilfe des Ansatzes $u(x, y, t) = T(t) \cdot X(x) \cdot Y(y)$ für die Lösung der Differentialgleichung drei entkoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für X , Y und T her.
- b) Leiten Sie zunächst aus den Randwerten

$$\begin{aligned}u(0, y, t) &= u(\pi, y, t) = 0, & \text{für } y \in [0, \pi], t > 0, \\u(x, 0, t) &= u(x, \pi, t) = 0, & \text{für } x \in [0, \pi], t > 0,\end{aligned}$$

Randbedingungen für die Lösungen der Differentialgleichungen für X und Y her, und lösen Sie die so erhaltenen gewöhnlichen Randwertaufgaben für X und Y .

Bestimmen Sie anschließend die passenden Funktionen $T(t)$.

- c) Geben Sie eine Reihendarstellung der Lösung u der ursprünglichen Aufgabe an und nehmen Sie eine Anpassung an die Anfangswerte

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{2} (\sin(2x) + \sin(x)) \sin(y) \quad \text{für } x, y \in [0, \pi]$$

vor.

Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$?

Abgabetermine: 27.06.-01.07.2022