Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2022**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Lösen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes die folgende Dirichlet Randwertaufgabe für die Laplace-Gleichung auf dem Kreis $r^2 = x^2 + y^2 \leq 9$.

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \qquad && 0 \leq r < 3 \\ u(3,\varphi) &= \cos^2(\varphi) && \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipps:

Verwenden Sie für die Lösung der Eulerschen Differentialgleichung
$r^2 \cdot g''(r) + ar \cdot g'(r) + b \cdot g(r) = 0$ den Ansatz $g(r) = r^k$.
Es gilt: $\cos^2(\varphi) = \dfrac{1}{2}\,(1 + \cos(2\varphi)\,)$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \sin(x)\,t && 0 < x < \pi\,,\ 0 < t\,, \\ u(x,0) &= 4\sin(3x) + \tfrac{x}{\pi} && 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) &= \phi_1(t) = 0 && 0 \leq t, \\ u(\pi,t) &= \phi_2(t) = 1 && 0 \leq t. \end{aligned}$$

Hinweis: Homogenisieren Sie zunächst die Randbedingungen, indem Sie die Funktion

$$v(x,t) = u(x,t) - \phi_1(t) - \frac{x-a}{b-a}\,(\phi_2(t) - \phi_1(t))$$

mit $a = 0$ und $b = \pi$ einführen und in der Aufgabenstellung die u–Ausdrücke durch geeignete v–Ausdrücke ersetzen. Man erhält z.B.

$$u_t = v_t + \dot{\phi}_1 + \frac{x-a}{b-a}\left(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\right).$$

Bearbeitung: 14.06.-17.06.2022