Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2022**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie den Typ folgender Differentialgleichungen

a) $u_{xx} + 4u_{xt} - 5u_{tt} \,=\, 0,$

b) $10u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} = 0$

c) $4x^2\, u_{xx} + 8xy\, u_{xy} + y^2\, u_{yy} + 2x\, u_x \,= 0$

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } 1 < x^2+y^2 < 9, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9. \end{aligned}$$

Hinweise: Die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten lautet $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0\,.$
Rotationssymmetrisch heißt unabhänging von $\phi\,.$

Aufgabe 3: Nur für die ganz schnellen Studierenden

a) Sei u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcrl} \Delta u & = & -1 & \quad |x| < 1, |y| < 1, \\ u(x,y) & = & 0 & \quad |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1 \end{array}$$

und $v(x,y) \,=\, u(x,y) + \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)\,.$

Zeigen Sie, dass $v(x,y)$ die Laplace-Gleichung löst, und bestimmen Sie eine obere und eine untere Schranke für $u(0,0)\,.$

b) Sei $u(x,y)$ eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \qquad \text{in } \Omega :=]0,2[\times]0,1[\\ u(x,y) &= 3x^2 \qquad\qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, ohne u zu berechnen, für jede der folgenden Aussagen, ob sie zutreffend ist. Begründen Sie Ihre Antworten.

- Es gilt $\max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} u(x,y) = 2\,.$
- Es gilt $\min_{(x,y)\in\bar{\Omega}} u(x,y) = 0\,.$
- $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2$ ist eine Lösung der Randwertaufgabe.

Bearbeitung: 30.05.-03.06.2022