Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2022**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist die Differentialgleichung

$$2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + \sqrt{2}(u_x + u_y) \;=\; 0\,.$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung.

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ihre Normalform.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung und führen Sie die Rücktransformation durch.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} &= \;0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \cos(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= -4\sin(x). \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Substitution $\alpha \;=\; x + t,\; \mu \;=\; x - 2t\,.$

Hinweis: Vorgehensweise analog zur Herleitung der Lösung des Cauchy-Problems für die Wellengleichung in der Vorlesung. Alternativ: Umrechnen der Ableitungen nach x, t *in Ableitungen nach* $\alpha,\ \mu\,.$

Aufgabe 3:

a) Für welche reellen Zahlen α bzw. für welche reellen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen im $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

i) $\tilde{u}(x,y) = \cos(\alpha x) \cdot e^{3y}\,,$ ii) $\hat{u}(x,y) = \sin(\alpha x) \cdot \cosh(3y)$

iii) $u(x,y) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 + g(x) \cdot y^2)\,.$

b) Sei $\Omega := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 16\right\}$ und u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u(x,y) = \;0 \qquad \text{in } \Omega\,, \qquad u(x,y) = \frac{2y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung.

Hinweis: $\sin^2(\varphi) = \dfrac{1 - \cos(2\varphi)}{2}\,.$

Abgabetermine: 30.05.-03.06.2022