Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Entropielösung der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$\text{a) } u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } u(x, 0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$$

Aufgabe 2)

Gegeben ist die Erhaltungsgleichung $u_t + \left(\frac{u^4}{16}\right)_x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

- Sind die Charakteristiken $(x(t), t)$ Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Gegeben seien die Anfangsdaten $u(x, 0) = 2 + \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Charakteristik durch den Punkt $(0, 0)$.
- Prüfen Sie, welche der unten angegebenen Funktionen u^* , $\tilde{u}$, $\hat{u}$ eine (schwache) Entropielösung zu den Anfangswerten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist.

$$u^*(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq \frac{3}{2}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{3}{2}t. \end{cases} \quad \tilde{u}(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq \frac{15}{16}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{15}{16}t. \end{cases}$$

$$\hat{u}(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 0, \\ 2 - \frac{x}{t} & \text{für } 0 < x \leq t, \\ 1 & \text{für } x > t. \end{cases}$$