

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 3, Hausaufgaben

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie die Entropielösung der Burgers Gleichung  $u_t + uu_x = 0$  mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt  $t = 2$ . Welches neue Problem tritt bei  $t = 2$  auf?

**Kür:** Bestimmen Sie die Lösung für  $t > 2$ .

#### Aufgabe 2:

Bestimmen Sie Entropielösungen der Differentialgleichung

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

mit der Flussfunktion  $f(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$  und den Anfangsbedingungen

$$\text{a) } u(x, 0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 2 & 0 < x. \end{cases}$$

Hinweis: Gefragt sind nur Lösungen für die vorgegebenen Anfangswerte. Sie brauchen keine Lösungen für allgemeine Anfangswerte anzugeben!

#### Aufgabe 3:

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 1 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x, t)$  = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ ,

$v(x, t)$  = Geschwindigkeit im Punkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ ,

$q(x, t)$  = Fluß = Anzahl Fahrzeuge die  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  pro Zeiteinheit passieren.

Wir verfeinern unser Modell aus Blatt 1, indem wir eine maximale Dichte und eine maximale Geschwindigkeit

$u_{max}$  = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

$v_{max}$  = maximale Geschwindigkeit

eingeführen. Dies kann z. B. wie folgt geschehen:

$$v(u(x, t)) = v_{max} \left( 1 - \frac{u(x, t)}{u_{max}} \right)$$

- a) Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ( $u_t + q_x = 0$ ) auf.
- b) Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.
- c) Skizzieren Sie die Charakteristiken für

$$v_{max} = 1 \quad (\text{Hier ist geeignet skaliert worden!})$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l = u_{max}/2 & x < 0 \\ u_r = u_{max} & x > 0 \end{cases} \quad (\text{rote Ampel/ Stau etc.})$$

- d) Für die Burgers Gleichung hatten wir Stoßwellen nur im Fall  $u_l > u_r$  zugelassen. Hier muss offensichtlich eine andere Bedingung her. Woran könnte das liegen?

**Hinweis:** Eine vollständige Beantwortung der Frage ist nur mit Hilfe der Vorlesungsfolien nicht möglich. Sie können hier nur eine Vermutung äußern!

**Abgabetermine: 09.05.-13.05.2022**