Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2022**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1: **[5 Punkte]**

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t - \sin(t)\, u_x &= \cos(t)\,, && x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \exp(-x^2) = e^{-x^2} && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: **[6= 2+1+2+1 Punkte]**

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

A) $u_t + 20\, u_x = 21u\,.$
B) $u_t + 20u\, u_x = 21\,.$
C) $u_t - 5u^2\, u_x = 0.$
D) $u_t + 5(x+1)\, u_x = 0.$

versehen mit der Anfangsbedingung

$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,,$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A, B, C, D gelten für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe die folgenden Aussagen i) und/oder ii)?

i) Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken.
ii) Die Charakteristiken sind Geraden.

Begründen Sie Ihre Antworten. Beachten Sie, dass Sie keine Lösungen berechnen müssen!

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie eine stetige Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= x, && x, t > 0 \\ u(x,0) &= x && (x \geq 0) \\ u(0,t) &= t && (t \geq 0) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode. Bestimmen Sie dazu jeweils die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x,0) = x$ bzw. zur Randbedingung $u(0,t) = t$ und setzen Sie diese Lösungen stetig zusammen. Ist die so gewonnene Lösung für alle $x, t \geq 0$ partiell differenzierbar?

Freiwillige Zusatzaufgabe : Wer mag, kann die Aufgabe auch mittels Laplace–Transformation bzgl. der Variablen t *lösen. Bei der Transformation ist* x *als Parameter aufzufassen. Im Bildraum ist eine Anfangswertaufgabe bzgl. einer gewöhnlichen Differentialgleichung in* x *zu lösen.*

Abgabe: 25.04.-29.04.2022