

Klausur Differentialgleichungen II

06. März 2023

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	
-----	----	----	-----	-----	----	-----	----	--

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

Σ =

Aufgabe 1: [4 Punkte]

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$:

$$\begin{aligned}u_t - 4t u_x &= 5, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= \cos(x) & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Lösung: Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

$$\frac{dx}{dt} = -4t \implies dx = -4t dt \implies x = -2t^2 + C_1 \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$\frac{du}{dt} = 5 \implies du = 5dt \implies u = 5t + C_2. \quad [1 \text{ Punkt}]$$

Mit $C_1 = x + 2t^2$ und $C_2 = u - 5t$ machen wir den Ansatz

$$C_2 = f(C_1)$$

und erhalten

$$u - 5t = f(x + 2t^2)$$

und damit die allgemeine Lösung: $u(x, t) = 5t + f(x + 2t^2)$.

Die Anfangsbedingung verlangt:

$$u(x, 0) = 5 \cdot 0 + f(x + 2 \cdot 0^2) = f(x) \stackrel{!}{=} \cos(x). \quad \% \quad [1 \text{ Punkt}]$$

Also $u(x, t) = 5t + \cos(x + 2t^2)$. **[2 Punkte]**

Aufgabe 2: [6= 2+4 Punkte]

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

mit der Flussfunktion $f(u) = \frac{(2u+1)^2}{3}$.

- Ist die Lösung konstant entlang der Charakteristiken?
Sind die Charakteristiken Geraden?
Begründen Sie Ihre Antworten.
- Bestimmen Sie die Entropielösung der Differentialgleichung zu den Anfangswerten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ -1 & 0 < x. \end{cases}$$

Hinweis: Gefragt ist nur die Lösung für die vorgegebenen Anfangswerte. Sie brauchen keine Lösungen für allgemeine Anfangswerte anzugeben!

Lösung:

- Mit den üblichen Bezeichnungen gilt $f(u) = \frac{(2u+1)^2}{3}$.

Auf den Charakteristischen Kurven gilt

$$\dot{x}(t) = f'(u) = \frac{4(2u+1)}{3} \text{ und } \dot{u}(t) = 0.$$

u ist also konstant entlang der Charakteristiken und die Steigung der Charakteristiken hängt nur von u ab. Somit sind die Charakteristiken Geraden mit konstanter Steigung $\frac{8u(x(0),0)+4}{3}$. **(2 Punkte)**

- Zu den Daten aus Teil b) würde bei Lösung über die Charakteristiken Methode sofort (also bereits bei $t = 0$) eine Mehrdeutigkeit entstehen. Es muss mit $u_l = 1$ und $u_r = -1$ eine Stoßfront $s(t)$ eingeführt werden. **[1 Punkt]**

$$\text{Mit } f(u_l) = \frac{(2+1)^2}{3} = 3, \quad f(u_r) = \frac{(-2+1)^2}{3} = \frac{1}{3} \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

erhalten wir

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 - (-1)} = \frac{4}{3} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

und damit

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l = 1 & x \leq s(t) = \frac{4t}{3} \\ u_r = -1 & \frac{4t}{3} < x. \end{cases} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 3: [6 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 9u_{xx} &= 5 \sin(3x) & 0 < x < 2\pi, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ u(0, t) &= 0 & 0 \leq t, \\ u(\pi, t) &= 0 & 0 \leq t. \end{aligned}$$

Lösung:

Mit $L = 2\pi$, $\omega = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ und $c = 9$ machen wir den Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\omega x).$$

Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t)) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \stackrel{!}{=} 5 \sin(3x)$$

Einsetzen in die Anfangsbedingung:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) \stackrel{!}{=} 0 \implies a_n(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Zusammen: $\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = 0$, $a_n(0) = 0$, $\forall n \neq 6$,

also $a_n(t) \equiv 0$, $\forall n \neq 6$. **. (1 Punkt)**

Für $n = 6$ erhalten wir:

$$\dot{a}_6(t) + 9 \cdot 6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_6(t) = 5, \quad a_6(0) = 0$$

Zugehörige homogene Differentialgleichung

$$\dot{a}_{6h}(t) + 81a_{6h}(t) = 0 \implies a_{6h}(t) = k \cdot e^{-81t}.$$

Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe: $a_{6p}(t) = \alpha$

$$\text{Einsetzen in Differentialgleichung: } 9 \cdot 6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_6(t) = 5 \implies a_{6p}(t) = \frac{5}{81}.$$

Alternativ: Variation der Konstanten mit dem Ansatz $a_{6p}(t) = k(t)e^{-81t}$.

$$a_6(t) = \gamma e^{-81t} + \frac{5}{81} \quad \text{und} \quad a_6(0) = \gamma e^0 + \frac{5}{81} = 0 \implies \gamma = -\frac{5}{81}$$

$$\implies \boxed{a_6(t) = \frac{5}{81}(1 - e^{-81t})} \quad \textbf{(3 Punkte)}$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(k\omega x) = a_6(t) \sin\left(\frac{6}{2}x\right) = \frac{5}{81}(1 - e^{-81t}) \sin(3x) \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 4: [4 Punkte]

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für die Wellengleichung mit stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dieses Anfangswertproblem für endliche $t \in [0, T]$ wohlgestellt ist.

Lösung:

Durch die Formel von d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz.$$

ist eine eindeutige Lösung gegeben. **(1 Punkt)**

$\tilde{u}$ sei die Lösung zu

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} &= 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x) &= \tilde{f}(x), \quad \tilde{u}_t(x, 0) = \tilde{v}_0(x) = \tilde{g}(x) & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| &= \left| \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] - \frac{1}{2} [\tilde{f}(x + ct) + \tilde{f}(x - ct)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) - \tilde{g}(z) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |f(x + ct) - \tilde{f}(x + ct)| + \frac{1}{2} |f(x - ct) - \tilde{f}(x - ct)| + \frac{2ct}{2c} \|g - \tilde{g}\|_\infty \\ &\leq \|f - \tilde{f}\|_\infty + T \|g - \tilde{g}\|_\infty \end{aligned}$$

Also

$$\|u - \tilde{u}\|_\infty \leq \|f - \tilde{f}\|_\infty + T \|g - \tilde{g}\|_\infty. \quad \mathbf{(3 \text{ Punkte})}$$