Klausur Differentialgleichungen II

06. September 2022

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

**Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.**

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	
-----	----	----	-----	-----	----	-----	----	--

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

--

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\Sigma =$

Aufgabe 1: [7 Punkte]

Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq 0, \\ 0 & 0 < x \leq 1, \\ -2 & 1 < x. \end{cases}$$

- Berechnen Sie eine schwache Lösung für $t \in [0, \tilde{t}]$ mit einem hinreichend kleinem $\tilde{t}$.
- Bis zu welchem t^* kann die Lösung aus a) maximal fortgesetzt werden?
- Geben Sie eine schwache Lösung für $t > t^*$ an.

Lösung:

- An den zwei Sprungstellen der Anfangsdaten führen wir zwei Stoßwellen ein. Die Sprungbedingung verlangt:

$$\dot{s}_1(t) = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \dot{s}_2(t) = \frac{0 - 2}{2} = -1.$$

Wir erhalten die Stoßfronten

$$s_1(t) = \frac{1}{4}t \quad \text{und} \quad s_2(t) = 1 - t.$$

Für hinreichend kleine t ist

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq \frac{1}{4}t, \\ 0 & \frac{1}{4}t < x \leq 1 - t, \\ -2 & 1 - t < x. \end{cases} \quad \text{(3 Punkte)}$$

eine schwache Lösung.

- Für t^* mit

$$\frac{1}{4}t^* = 1 - t^* \iff \frac{5}{4}t^* = 1 \iff t^* = \frac{4}{5} \quad \text{(1 Punkt)}$$

treffen die Stoßfronten aufeinander und die Lösung aus a) wird mehrdeutig.

- Für $t^* = \frac{4}{5}$ gilt $s_1(t) = s_2(t) = \frac{1}{5}$ und

$$u(x, \frac{4}{5}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq \frac{1}{5}, \\ -2 & x > \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Wir fügen die neue Stoßfront

$$s_3(t) = \frac{1}{5} + \dot{s}_3(t - \frac{4}{5}) = \frac{1}{5} + \frac{\frac{1}{2} - 2}{2}(t - \frac{4}{5})$$

ein und erhalten für $t > \frac{4}{5}$

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq \frac{1}{5} - \frac{3}{4}(t - \frac{4}{5}) = \frac{4}{5} - \frac{3}{4}t, \\ -2 & x > \frac{4}{5} - \frac{3}{4}t. \end{cases} \quad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 2) [3 Punkte]

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung für $u(x, y)$:

$$u_{xx} + 6u_{xy} + (x - y)u_{yy} + x^3 u_x + 5u = 6.$$

Geben Sie die Ordnung der Differentialgleichung an und bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung.

Lösung:

Die Differentialgleichung hat die Ordnung zwei.

(1 Punkt)

Wegen $(x - y) - 3^2 = 0 \iff y = x - 9$ gilt

Die Differentialgleichung ist $\begin{cases} \text{elliptisch} & y < x - 9, \\ \text{parabolisch} & y = x - 9, \\ \text{hyperbolisch} & y > x - 9. \end{cases}$ **(2 Punkte)**

Aufgabe 3: [7 Punkte]

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
 u_t - 5u_{xx} &= \frac{\pi x}{4} \sin(\pi t) && \text{für } x \in (0, 4), t > 0, \\
 u(x, 0) &= 2 \sin(\pi x) + 3 \sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0, 4], \\
 u(0, t) &= 0, \quad u(4, t) = 1 - \cos(\pi t) && \text{für } t > 0.
 \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned}
 v_t - 5v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0, 4), t > 0, \\
 v(x, 0) &= 2 \sin(\pi x) + 3 \sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0, 4], \\
 v(0, t) &= 0, \quad v(4, t) = 0 && \text{für } t > 0.
 \end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Lösung:

a) Homogenisierung:

$$v(x, t) = u(x, t) - 0 - \frac{x}{4}(1 - \cos(\pi t) - 0) = u(x, t) - \frac{x}{4}(1 - \cos(\pi t))$$

oder

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{4}(1 - \cos(\pi t)). \quad [1 \text{ Punkt}]$$

Dann gilt:

$$u_t = v_t + \frac{\pi x}{4} \sin(\pi t), \quad v_{xx} = u_{xx}$$

$$\text{Neue DGL: } v_t + \frac{\pi x}{4} \sin(\pi t) - 5v_{xx} = \frac{\pi x}{4} \sin(\pi t) \iff$$

$$\boxed{v_t - 5v_{xx} = 0} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned}
 v(x, 0) &= u(x, 0) - \frac{x}{4}(1 - \cos(0)) \\
 &= 2 \sin(\pi x) + 3 \sin(2\pi x) - 0 \iff
 \end{aligned}$$

$$\boxed{v(x, 0) = 2 \sin(\pi x) + 3 \sin(2\pi x)}$$

$$\text{Randwerte: } \boxed{v(0, t) = v(4, t) = 0} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

b) Mit $\omega = \frac{\pi}{4}$ und $c = 5$ gilt:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t} \sin(k\omega x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{5k^2\pi^2}{16}t} \sin\left(\frac{k\pi}{4}x\right) \quad (1 \text{ Punkt})$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt:

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{4}x\right) \stackrel{!}{=} 2 \sin(\pi x) + 3 \sin(2\pi x) \\ \implies a_4 = 2, a_8 = 3, a_k = 0 \quad \forall k \notin \{4, 8\}.$$

$$v(x, t) = 2 e^{-\frac{5 \cdot 4^2 \pi^2}{16}t} \sin\left(\frac{4\pi}{4}x\right) + 3 e^{-\frac{5 \cdot 8^2 \pi^2}{16}t} \sin\left(\frac{8\pi}{4}x\right) \quad [2 \text{ Punkte}]$$

c) Für die Lösung von a) erhalten wir somit

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{4} (1 - \cos(\pi t)) \\ = 2 e^{-5\pi^2 t} \sin(\pi x) + 3 e^{-20\pi^2 t} \sin(2\pi x) + \frac{x}{4} (1 - \cos(\pi t)). \quad [1 \text{ Punkt}]$$

Aufgabe 4: [1+2 Punkte]

Gesucht sei eine Lösung des folgenden Problems

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u = f & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \\ u_y = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{cases}$$

- a) Wann heißt das obige Problem wohlgestellt (korrekt oder sachgemäß gestellt)?
- b) Zeigen Sie mit Hilfe folgenden Ansatzes, dass dieses Problem nicht wohlgestellt ist. Wählen Sie

$$\begin{aligned} f &\equiv 0, & g &\equiv 0 \\ f_n &\equiv 0, & g_n &= \frac{1}{n} \sin(nx) \end{aligned}$$

Hinweis: Die Lösung zu Anfangswerten f_n und g_n lautet $u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$.

Lösung:

- a) Es müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:
- (i) Existenz einer Lösung,
 - (ii) Eindeutigkeit der Lösung,
 - (iii) Stetige Abhängigkeit von den Daten, d.h. für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\|u - u_n\| \leq c_1 \|f - f_n\| + c_2 \|g - g_n\|.$$

- b) • Falls $f \equiv g \equiv 0$, so ist $u \equiv 0$.
- Falls $f_n \equiv 0$ und $g_n = \frac{1}{n} \sin(nx)$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0.$$

Andererseits ist aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\infty = \infty.$$

Dies widerspricht der Forderung nach der stetigen Abhängigkeit von den Daten,

$$\|u - u_n\|_\infty = \infty \geq 0 = \|f - f_n\|_\infty + \|g - g_n\|_\infty.$$