Fachbereich Mathematik **SoSe 2022**
Prof. Dr. J. Behrens

Klausur zur Mathematik IV
(Modul: Differentialgleichungen II)
06. September 2022

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI CS	ET	GES	IIW IN	MB	MTB	SB	

Wertung nach PO : Als Mathematik IV ☐ Einzelwertung DGL II ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: [7 Punkte]

Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \le 0, \\ 0 & 0 < x \le 1, \\ -2 & 1 < x\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie eine schwache Lösung für $t \in [0, \tilde{t}\,]$ mit einem hinreichend kleinem $\tilde{t}$.

b) Bis zu welchem t^* kann die Lösung aus a) maximal fortgesetzt werden?

c) Geben Sie eine schwache Lösung für $t > t^*$ an.

Aufgabe 2) [3 Punkte]

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung für $u(x,y)$:

$$u_{xx} + 6u_{xy} + (x-y)\,u_{yy} + x^3\,u_x + 5u = 6.$$

Geben Sie die Ordnung der Differentialgleichung an und bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung.

Aufgabe 3: [7 Punkte]

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 5u_{xx} &= \frac{\pi x}{4}\sin(\pi t) && \text{für } x \in (0,4), t > 0, \\ u(x,0) &= 2\sin(\pi x) + 3\sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0,4], \\ u(0,t) = 0, \quad u(4,t) &= 1 - \cos(\pi t) && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_t - 5v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0,4), t > 0, \\ v(x,0) &= 2\sin(\pi x) + 3\sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0,4], \\ v(0,t) = 0, \quad v(4,t) &= 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Aufgabe 4: [1+2 Punkte]

Gesucht sei eine Lösung des folgenden Problems

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u = f & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \\ u_y = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{cases}$$

a) Wann heißt das obige Problem wohlgestellt (korrekt oder sachgemäß gestellt)?

b) Zeigen Sie mit Hilfe folgenden Ansatzes, dass dieses Problem nicht wohlgestellt ist. Wählen Sie

$$f \equiv 0, \quad g \equiv 0$$
$$f_n \equiv 0, \quad g_n = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

Hinweis: Die Lösung zu den Daten f_n und g_n lautet $u_n(x, y) = \frac{1}{n^2}\sin(nx)\sinh(ny)$.