Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0 && x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ t > 0,\\
u(x,0) &= \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{4}],\\ \frac{\pi}{2} - x & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}],\end{cases}\\
u_t(x,0) &= 2\sin(4x) && x \in [0, \frac{\pi}{2}],\\
u(0,t) &= u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 && t > 0.
\end{aligned}$$

b) Gegeben ist die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
u_{tt} - 4u_{xx} &= e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\, 3),\ t > 0,\\
u(x,0) &= 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
u_t(x,0) &= \frac{x}{3} && x \in [0,3], \qquad (1)\\
u(0,t) &= e^{-t} && t > 0,\\
u(3,t) &= 1 && t > 0.
\end{aligned}$$

für $u = u(x,t)$. Welche Anfangsrandwertaufgabe erhält man nach geeigneter Homogenisierung der Randdaten?

Lösung 1:

a) Hier gilt mit $L = \frac{\pi}{2},\ \ \omega = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{\pi/2} = 2,\ \ c = 1$

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin((ck\omega t)\right] \sin(k\omega x)\,,$

wobei A_k und $\dfrac{ck\pi}{L} B_k$ die Fourierkoeffizienten der Funktionen $u(x,0)$ bzw $2\sin(4x)$ bei Entwicklung nach den Funktionen $\sin(2kx)$ sind.

Die zweite Anfangsbedingung liefert

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot (ck\omega) \sin(k\omega x) = 2\sin(4x)$$

Es gilt $\omega = 2, \quad c = 1$ Man liest unmittelbar ab:

$B_2 = \dfrac{2}{4}$ und $B_k = 0$ sonst.

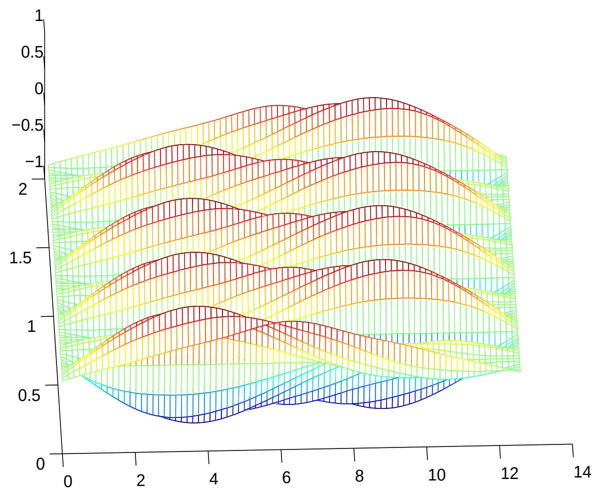
$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\cdot\sin(2kx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(2kx)dx + \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)\sin(2kx)dx$$

$$= -\frac{4}{2k\pi}\big[x\cos(2kx)\big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{4}{2k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2kx)dx - \frac{2}{2k}\big[\cos(2kx)\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \frac{4}{2k\pi}\big[x\cos(2kx)\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{2k\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(2kx)dx = \frac{2}{k^2\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(ck\omega t)\sin(k\omega x)\right] + B_2\sin(2c\omega t)\sin(2c\omega x) \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(ck\omega t)\sin(k\omega x)\right] + \frac{1}{2}\sin(4t)\sin(4x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(4t)\sin(4x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(2kt)\sin(2kx)\cdot \end{aligned}$$



b)

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\,3),\ t > 0, \\ &u(x,0) = 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3], \\ &u_t(x,0) = \frac{x}{3} && x \in (0,3), \qquad (1) \\ &u(0,t) = e^{-t} && t \geq 0, \\ &u(3,t) = 1 && t \geq 0. \end{aligned}$$

Homogenisierung der Randdaten gemäß $v = u - e^{-t} - \dfrac{x}{3}(1 - e^{-t})$ liefert

$u_t = v_t - e^{-t}(1 - \frac{x}{3}), \quad u_{tt} = v_{tt} + e^{-t}(1 - \frac{x}{3}), \quad v_{xx} = u_{xx}.$

Neue DGL:

$v_{tt} + e^{-t}(1 - \frac{x}{3}) - 4v_{xx} = e^{-t}(1 - \frac{x}{3}) \iff v_{tt} - 4v_{xx} = 0\,.$

Neue Anfangs- und Randwerte:

$v(x,0) = u(x,0) - e^0 - \frac{x}{3}(1 - e^0) = 1 + 2\sin(\pi x) - 1 = 2\sin(\pi x),$

$v_t(x,0) = u_t(x,0) + e^0 - \frac{x}{3} \cdot e^0 = 1,$

$v(0,t) = v(3,t) = 0\,.$

Aufgabe 2:

Gegeben ist das folgende Dirichletproblem

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0, & x, y &\in]0,\pi[\,, \\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(2x), & x &\in [0,\pi]\,, \\
u(x,\pi) &= 0, & x &\in [0,\pi]\,, \\
u(0,y) &= 1 - \frac{y}{\pi} + \sin^3(y), & y &\in [0,\pi]\,, \\
u(\pi,y) &= 0, & y &\in [0,\pi]\,.
\end{aligned}$$

Schreiben Sie das Problem so um, dass Sie jeweils zwei Randwertaufgaben lösen müssen, bei denen die gesuchte Lösung nur auf einer Kante des Rechtecks nicht identisch verschwindet.

Hinweis: Führen Sie eine bilineare Funktion $u_E(x,y) := a + bx + cy + dxy$ *ein, die die Randwerte in den Ecken* $(0,0)$, $(0,\pi)$, (π,π), $(\pi,0)$ *interpoliert, und schreiben Sie das Problem um in ein Problem für* $v(x,y) = u(x,y) - u_E(x,y)$ *.*

Für den Fall, dass Sie die neuen Aufgaben lösen wollen: Es gilt $\sin(3y) = 3\sin(y) - 4\sin^3(y)$.

Lösung 2:

Wir folgen dem Hinweis und berechnen zunächst eine bilineare Funktion $u_E(x,y) := a + bx + cy + dxy$, die die Randwerte in den Ecken $(0,0)$, $(0,\pi)$, (π,π) und $(\pi,0)$ interpoliert. Dabei erhalten wir

$$u_E(x,y) = 1 - \frac{1}{\pi}(x+y) + \frac{1}{\pi^2}xy.$$

Die Transformation $v(x,y) = u(x,y) - u_E(x,y)$ führt uns zu dem System

$$\begin{aligned}
&\Delta v = 0 \quad \text{auf } (0,\pi)\times(0,\pi), \\
&v(x,0) = u(x,0) - u_E(x,0) = 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(2x) - \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) = \sin(2x), \\
&v(x,\pi) = u(x,\pi) - u_E(x,\pi) = 0 - \left(1 - \frac{1}{\pi}(x+\pi) + \frac{1}{\pi^2}(x\pi)\right) = 0, \\
&v(0,y) = u(0,y) - u_E(0,y) = 1 - \frac{y}{\pi} + \sin^3(y) - \left(1 - \frac{y}{\pi}\right) = \sin^3(y), \\
&v(\pi,y) = u(\pi,y) - u_E(\pi,y) = 0 - \left(1 - \frac{1}{\pi}(\pi+y) + \frac{1}{\pi^2}(\pi y)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Da die Randdaten nur auf zwei Seiten des Rechtecks verschwinden, betrachten wie die folgenden zwei Teilprobleme auf $(0,\pi)\times(0,\pi)$:

$$\Delta v_1 = 0 \quad \text{mit} \quad v(x,0) = \sin(2x),\ v(x,\pi) = 0,\ v(0,y) = 0,\ \text{und } v(\pi,y) = 0$$

sowie

$$\Delta v_2 = 0 \quad \text{mit} \quad v(x,0) = 0,\ v(x,\pi) = 0,\ v(0,y) = \sin^3(y),\ \text{und } v(\pi,y) = 0.$$

Die Lösung des Ausgangsproblems ergibt sich dann aus der Gleichung

$$u(x,y) = u_E(x,y) + v_1(x,y) + v_2(x,y).$$

Nur als Info für die Gruppenleitung: Die Lösung erhält man dann wie folgt:

Ein Produktansatz der Form $v_1(x,y) = X(x)Y(y)$ führt auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&X'' = \lambda X, \quad Y'' = -\lambda Y \\
&v_1(0,y) = X(0)Y(y) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0, \\
&v_1(\pi,y) = X(\pi)Y(y) = 0 \Longrightarrow X(\pi) = 0, \\
&v_1(x,\pi) = X(x)Y(\pi) = 0 \Longrightarrow Y(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Aufgrund der beiden Nullrandwerte für X lösen wir zunächst die Randwertaufgabe $X'' = \lambda X$, $X(0) = 0$, $X(\pi) = 0$. Dabei erhalten wir nur für negative λ nichttriviale Lösungen

$$\begin{aligned}
&X(x) = A_\lambda \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B_\lambda \sin(\sqrt{-\lambda}x) \\
&X(0) = 0 \Longrightarrow A_\lambda = 0, \quad X(\pi) = 0 \Longrightarrow \lambda_k = -k^2 \\
&X_k(x) = \sin(kx),\ k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Mit diesen λ-Werten wird die DGL für Y gelöst.

$$\begin{aligned}
&Y'' = k^2 Y \Longrightarrow Y_k(y) = A_k e^{-ky} + B_k e^{ky} \\
&Y_k(\pi) = 0 \Longrightarrow A_k e^{-k\pi} + B_k e^{k\pi} = 0 \Longrightarrow A_k = -e^{2k\pi} B_k \\
&\quad \Longrightarrow Y_k(y) = B_k \left(e^{ky} - e^{2k\pi} e^{-ky}\right)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Superpositionsprinzips erhalten wir die Funktion $v_1(x,y)$ als Linearkombination der Funktionen $X_k(x)Y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$v_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(e^{ky} - e^{2k\pi} e^{-ky}\right) \sin(kx).$$

Die Koeffizienten c_k erhalten wir nun aus der der noch nicht verwendeten Randbedingung $v_1(x,0) = \sin(2x)$. Es gilt:

$$v_1(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(1 - e^{2k\pi}\right) \sin(kx) \stackrel{!}{=} \sin(2x)$$

$$\Longrightarrow c_2 \left(1 - e^{4\pi}\right) = 1,\ c_k = 0, k \neq 2$$

Also insgesamt:

$$v_1(x,y) = \frac{e^{2y} - e^{4\pi} e^{-2y}}{1 - e^{4\pi}} \sin(2x).$$

Das zweite Teilproblem behandeln wir analog mit einem Produktansatz $v_2(x,y) = X(x)Y(y)$ und erhalten für $X(x)$ und $Y(y)$ die Lösungen

$$\begin{aligned}
&Y_k(y) = \sin(ky),\ k \in \mathbb{N}, \\
&X_k(x) = B_k \left(e^{kx} - e^{2k\pi} e^{-kx}\right),\ k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

sowie durch Superposition

$$v_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(e^{kx} - e^{2k\pi} e^{-kx}\right) \sin(ky).$$

Mit Hilfe der Randbedingung $v_2(0,y) = \sin^3(y) = \frac{3}{4}\sin(y) - \frac{1}{4}\sin(3y)$ erhalten wir wie oben die c_k durch Koeffizientenvergleich:

$$v_2(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(1 - e^{2k\pi}\right)\sin(ky) \stackrel{!}{=} \frac{3}{4}\sin(y) - \frac{1}{4}\sin(3y)$$

$$\Longrightarrow c_1\left(1 - e^{2\pi}\right) = \frac{3}{4},\ c_3\left(1 - e^{6\pi}\right) = -\frac{1}{4},\ c_k = 0, k \neq 1,3$$

Also insgesamt:

$$v_2(x,y) = \tfrac{3\left(e^{x} - e^{2\pi}e^{-x}\right)}{4(1-e^{2\pi})}\sin(y) - \tfrac{e^{3x} - e^{6\pi}e^{-3x}}{4(1-e^{6\pi})}\sin(3y).$$

Die Lösung des Ausgangsproblems ergibt sich schließlich aus der Beziehung:

$$u(x,y) = u_E(x,y) + v_1(x,y) + v_2(x,y).$$

Bearbeitungstermine: 29.06.-02.07.21