Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6 Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Die Funktion

$$\tilde{u}(x,t) \,=\, \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

löst die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} \,-\, c^2\tilde{u}_{xx} \,=\, h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) \,=\, \tilde{u}_t(x,0) \,=\, 0\,.$$

Berechnen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} \,-\, 4u_{xx} \,&=\, -4x, && x\in\mathbb{R},\, t>0 \\ u(x,0) \,&=\, 1, && x\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,0) \,&=\, \cos(x), && x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätigen Sie die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimmt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten, löst die homogene Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten und verwendet das Superpositionsprinzip.

Lösung 1:

Lösung der homogenen Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten nach d'Alembert

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\,(1{+}1){+}\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\cos(\eta)d\eta = 1{+}\frac{1}{4}\,(\sin(x{+}2t){-}\sin(x{-}2t)) \,=\, 1{+}\frac{1}{2}\,\cos(x)\sin(2t)$$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,t) \,&=\, \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} -4\omega\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau = \frac{-4}{8}\int_0^t \left[(x-2(\tau-t))^2 \,-\, (x+2(\tau-t))^2\right]\mathrm{d}\tau \\ &=\, \frac{1}{2}\int_0^t 8x(\tau-t)\mathrm{d}\tau \,=\, -2xt^2. \end{aligned}$$

Die Lösung des ursprünglichen Problems setzt sich aus den beiden Teillösungen zusammen:

$$u(x,t) \,=\, 1+\frac{1}{2}\,\cos(x)\sin(2t) \,-2xt^2$$

Probe:

$u(x,0) = 1,\; u_t(x,t) = \cos(x)\cos(2t)\; - 4xt \Longrightarrow u_t(x,0) = \cos(x)\,.$

$$u_{xx} = 0 - \frac{1}{2}\,\cos(x)\sin(2t) + 0 \qquad .$$

$u_{tt} = -2\cos(x)\sin(2t) - 4x\,.$

$u_{tt} - 4u_{xx} = -4x\,.$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Produktansatzes bzw. mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe.

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= 25u_{xx} && 0 < x < 2,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= 1 - \sin\left(\frac{x\pi}{4}\right) && 0 \le x \le\ 2\,, \\
u_t(x,0) &= \frac{x}{2} && 0 \le x \le 2\,, \\
u(0,t) &= 1, && t > 0\,, \\
u(2,t) &= t, && t > 0.
\end{aligned}$$

Hinweis : Sie können eine der beiden folgenden Formeln verwenden:

$$\sin(ax)\,\sin(bx) \;=\; \frac{1}{2}\,[\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)]$$

$$\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\int \sin(ax)\,\sin(bx)\,dx \;=\; \frac{a}{b^2}\,\cos(ax)\sin(bx) - \frac{1}{b}\sin(ax)\cos(bx)$$

Lösung 2:

Schritt 1) Homogenisierung der Randwerte: Mit $L = 2$, $f(t) = 1$ und $g(t) = t$ erhält man

$v(x,t) := u(x,t) - f(t) - \dfrac{x}{L}\,(g(t) - f(t)) = u(x,t) - 1 - \dfrac{x}{2}(t-1)$

Schritt 2) Neue Aufgabe:

$$\begin{aligned}
v_{tt} &= 25v_{xx} && 0 < x < 2,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
v(x,0) &= 1 - \sin\left(\frac{x\pi}{4}\right) - 1 + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \sin\left(\frac{x\pi}{4}\right) && 0 \le x \le\ 2\,, \\
v_t(x,0) &= \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 0 && 0 \le x \le 2\,, \\
v(0,t) &= 1 - 1 = 0, && t > 0\,, \\
v(2,t) &= t - 1 - (t-1) = 0, && t > 0.
\end{aligned}$$

Schritt 3) Lösung der homogenen Aufgabe:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \cos(\frac{ck\pi}{L}\,t) \;+\; B_k \sin(\frac{ck\pi}{L}\,t)\right]\,\sin(\frac{k\pi}{L}\,x)$$

Wegen $v_t(x,0) = 0$ gilt $\boxed{B_k = 0}$.

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L v(\alpha,0)\sin(\frac{k\pi}{L}\,\alpha)\,d\alpha = \int_0^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \sin(\frac{\alpha\pi}{4})\right)\sin(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\,d\alpha$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\alpha}{2}\sin(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\,d\alpha \;&=\; \left[\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{-2}{k\pi}\cdot\cos(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{2k\pi}\cos(\frac{k\pi}{2}\alpha) \\
&= \frac{-2}{k\pi}(-1)^k + \left[\cdots\sin(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\right]_0^2 = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

Nach dem 2. Hinweis gilt mit $a = \pi/4$ und $b = k\pi/2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sin(\frac{\alpha\pi}{4})\sin(\frac{k\pi}{2}\,\alpha)\,d\alpha &= \frac{b^2}{b^2-a^2}\left[\frac{a}{b^2}\cos(a\,\alpha)\sin(b\alpha) - \frac{1}{b}\sin(a\alpha)\cos(b\alpha)\right]_0^2 \\
&= \frac{\frac{k^2\pi^2}{4}}{\frac{k^2\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{16}}\left[\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{k^2\pi^2}{4}}\cos(\frac{\pi}{4}\,\alpha)\sin(\frac{k\pi}{2}\alpha) - \frac{1}{\frac{k\pi}{2}}\sin(\frac{\pi}{4}\alpha)\cos(\frac{k\pi}{2}\alpha)\right]_0^2 \\
&= \frac{4k^2}{4k^2-1}\left[-\frac{2}{k\pi}\sin(\pi/2)\cos(k\pi)\right] \\
&= \frac{4k^2}{4k^2-1}\cdot\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

Wer mit dem ersten Hinweis arbeitet, erhält nach Integration das gleiche Ergebnis.

$$A_k = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1} - \frac{4k^2}{4k^2-1}\left[\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}\right] = \frac{2}{k\pi}(-1)^k\frac{1}{4k^2-1}$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(\frac{5k\pi}{2}\,t)\ \sin(\frac{k\pi}{2}\,x)$$

$$u(x,t) = v(x,t) + 1 + \frac{x}{2}(t-1)$$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die Fourier–Koeffizienten der ungerade und 2–periodisch fortgesetzten Funktion $g(y) = y^2 - y,\ 0 \le y \le 1$, gegeben sind durch

$$a_k = 0\,, \quad \beta_k = \begin{cases} 0 & \text{für k gerade,} \\ -\dfrac{8}{(k\pi)^3} & \text{für k ungerade.} \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes und unter Verwendung von a) die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,1]\,, \\ u(x,1) = 0 & x \in [0,1]\,, \\ u(0,y) = g(y) = y^2 - y & y \in [0,1]\,, \\ u(1,y) = 0 & y \in [0,1]\,. \end{array}$$

Lösung 3:

a) Es gilt $a_k = 0$, da die Funktion ungerade ist. Für die β_k erhält man

$$\begin{aligned} \beta_k &= 2\int_0^1 (y^2 - y)\sin(k\pi y)dy \;=\; 2\left[(y^2-y)\frac{-\cos(k\pi y)}{k\pi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 (2y-1)\,\frac{\cos(k\pi y)}{k\pi}dy \\ &= \frac{2}{k\pi}\left[(2y-1)\frac{\sin(k\pi y)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{4}{k\pi}\int_0^1 \frac{\sin(k\pi y)}{k\pi}dy \\ &= \frac{4}{(k\pi)^2}\left[\frac{\cos(k\pi y)}{k\pi}\right]_0^1 = \begin{cases} 0 & \text{für k gerade} \\ -\dfrac{8}{(k\pi)^3} & \text{für k ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Der Produktansatz $u(x,y) = v(x)w(y)$ führt zu $v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$. Oder $\dfrac{v''}{v} = -\dfrac{w''}{w} = \lambda$.

Die Randwerte $u(x,0)$ und $u(x,1) = 0$ liefern $w(0) = w(1) = 0$. Die Lösungen der Eigenwertaufgabe

$$w'' = -\lambda w, \quad w(0) = w(1) = 0$$

lauten

$$w_k(y) = c_k \sin(k\pi y), \qquad \text{wobei } \lambda_k = k^2\pi^2.$$

Die zweite Dgl. $\dfrac{v''}{v} = k^2\pi^2$ hat die Lösungen

$v_k(x) = \tilde{a}_k e^{k\pi x} + \tilde{b}_k e^{-k\pi x}$

Damit folgt $\qquad u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi y)\left(\tilde{a}_k e^{k\pi x} + \tilde{b}_k e^{-k\pi x}\right).$

Aus der noch nicht verwendeten homogenen Randbedingung $u(1,y) \;=\; v(1)w(y) = 0$ folgt

$\tilde{a}_k e^{k\pi} + \tilde{b}_k e^{-k\pi} = 0 \iff \tilde{b}_k = -\tilde{a}_k e^{2k\pi}$

und damit

$$u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \sin(k\pi y)\left(e^{k\pi x} - e^{2k\pi}\, e^{-k\pi x}\right).$$

Die letzte Randbedingung lautet:

$$u(0,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \sin(k\pi y)\left(1 - e^{2k\pi}\right) \;=\; y^2 - y\ .$$

Mit den Fourierkoeffizienten β_k der Funktion $y^2 - y$ bei Entwicklung nach den Funktionen $\sin(k\pi y)$ aus Teil a) gilt also

$\beta_k \;=\; \tilde{a}_k\left(1 - e^{2k\pi}\right)$

oder

$$\tilde{a}_k \;=\; \frac{\beta_k}{1 - e^{2k\pi}}\ .$$

und damit

$$\begin{aligned}
u(x,y) \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{1 - e^{2k\pi}} \sin(k\pi y)\left(e^{k\pi x} - e^{2k\pi}\, e^{-k\pi x}\right) \\
&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{e^{-k\pi} - e^{k\pi}} \sin(k\pi y)\left(e^{k\pi x - k\pi} - e^{-k\pi x + k\pi}\right) \\
&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{-\sinh(k\pi)} \sin(k\pi y) \cdot \sinh(k\pi(x-1)).
\end{aligned}$$

Abgabetermine: 29.06 - 02.07.2021