

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x, t)$:

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= e^{-t} \sin(2x) + 1 & x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= \frac{1}{2} \sin(2x) & x \in (0, \pi), \\u(0, t) &= u(\pi, t) = t & t \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

a) Führen Sie eine Homogenisierung der Randwerte durch.

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgaben:

(i)

$$\begin{aligned}v_t^* - v_{xx}^* &= 0 & x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}^+, \\v^*(x, 0) &= \frac{1}{2} \sin(2x) & x \in (0, \pi), \\v^*(0, t) &= v^*(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}v_t^{**} - v_{xx}^{**} &= e^{-t} \sin(2x) & x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}^+, \\v^{**}(x, 0) &= 0 & x \in (0, \pi), \\v^{**}(0, t) &= v^{**}(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Lösung zu 1:

a) Mit $v(x, t) = u(x, t) - t - \frac{x-0}{\pi-0}(t-t) = u(x, t) - t$

oder $u(x, t) = v(x, t) + t$ erhalten wir

$u_t = v_t + 1, \quad u_{xx} = v_{xx}.$ Neue DGL:

$$v_t + 1 - v_{xx} = e^{-t} \sin(2x) + 1 \iff \boxed{v_t - v_{xx} = e^{-t} \sin(2x)}.$$

Anfangswerte: $v(x, 0) = u(x, 0) - 0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \sin(2x) \quad x \in (0, \pi).$

Randwerte: $v(0, t) = v(\pi, t) = t - t = 0.$

- b) (i) Homogene Dgl. mit homogenen Randdaten, $\omega = 1$, $c = 1$ und vorgegebene Anfangswerte

$$v^*(x, 0) = \frac{1}{2} \sin(2x), \quad x \in (0, \pi),$$

$$\implies v^*(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

wobei die $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(2x) \sin(kx) dx$

die Fourierkoeffizienten von $\frac{1}{2} \sin(2x)$ sind. Koeffizientenvergleich ergibt:

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad a_k = 0 \text{ sonst. Also}$$

$$v^*(x, t) = \frac{1}{2} e^{-4t} \sin(2x).$$

- (ii) Inhomogene Dgl. mit homogenen Anfangs- und Randdaten

$$v_t^{**} - v_{xx}^{**} = e^{-t} \sin(2x) \quad x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}^+,$$

$$v^{**}(x, 0) = 0 \quad x \in (0, \pi),$$

$$v^{**}(0, t) = v^{**}(\pi, t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Ansatz:

$$v^{**} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(kx), \quad a_k(0) = 0$$

Einsetzen in die Dgl ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\dot{a}_k(t) + k^2 a_k(t)] \sin(kx) = e^{-t} \sin(2x)$$

Damit erhalten wir $a_k(t) \equiv 0$ für $k \neq 2$ und die gewöhnliche Dgl

$$\dot{a}_2(t) + 4a_2(t) = e^{-t}$$

für a_2 . Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung lautet

$$a_{2,h}(t) = C e^{-4t}$$

Der Ansatz $a_2(t) = C(t)e^{-4t}$ liefert

$$\dot{C}(t) e^{-4t} = e^{-t} \iff C(t) = c + \frac{1}{3} e^{3t} \text{ z.B. } a_{2,p}(t) = \frac{1}{3} e^{-t}$$

$$a_2(t) = c e^{-4t} + \frac{1}{3} e^{-t} \quad \text{und mit } a_2(0) = 0 \text{ folgt } c = -1/3$$

$$a_2(t) = \frac{1}{3} (e^{-t} - e^{-4t})$$

$$v^{**}(x, t) = \frac{1}{3} (e^{-t} - e^{-4t}) \sin(2x)$$

c) Mit den Bezeichnungen aus a) und b) gilt

$$v(x, t) = v^*(x, t) + v^{**}(x, t) = \frac{1}{6} (2e^{-t} + e^{-4t}) \sin(2x) \cdot$$

und

$$u(x, t) = v(x, t) + t = \frac{1}{6} (2e^{-t} + e^{-4t}) \sin(2x) + t.$$

Bearbeitung: 08.06- 11.06.2021