Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 4u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \qquad t > 0. \end{aligned}$$

b) Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} &u_t - 2u_{xx} = -2xe^{-2t} + \sin(2\pi x)\,, && x \in (0,\,2),\ t > 0\,, \\ &u(x,0) = 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x)\,, && x \in [0,2]\,, \\ &u(0,t) = 1, \qquad u(2,t) = 2e^{-2t}\,, && t \ge 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randwerte auf folgendes Problem für eine geeignet definierte Funktion v führt:

$$\begin{aligned} &v_t - 2v_{xx} = \sin(2\pi x)\,, && x \in (0,\,2),\ t > 0, \\ &v(x,0) = 3\sin(3\pi x)\,, && x \in [0,2], \\ &v(0,t) = v(2,t) = 0\,, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(ii) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil i).

Lösung:

a) Mit $c = 4$ und $\omega = \pi/1$ lautet die Lösungsdarstellung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-4k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) = x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,.$$

Wir bestimmen die Fourierkoeffizienten der Summanden der rechten Seite:

$$b_k = 2\int_0^1 x\sin(k\pi x)dx = \; 2\cdot x\;\frac{-\cos(k\pi x)}{k\pi}\bigg|_0^1 + \; 2\int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}dx = \; \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}$$

$$\begin{aligned}\beta_k &= 2\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx = \int_0^1 \cos\left(k\pi x - \frac{\pi}{2}x\right) - \cos\left(k\pi x + \frac{\pi}{2}x\right)\\ &= \left[\frac{\sin\left((k\pi-\frac{\pi}{2})x\right)}{k\pi-\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin\left((k\pi+\frac{\pi}{2})x\right)}{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 = \frac{-(-1)^k}{k\pi-\frac{\pi}{2}} - \frac{(-1)^k}{k\pi+\frac{\pi}{2}}\\ &= (-1)^{k+1}\cdot\frac{2k\pi}{k^2\pi^2-\frac{\pi^2}{4}} = 2\cdot(-1)^{k+1}\cdot\frac{4k\pi}{4k^2\pi^2-\pi^2}\end{aligned}$$

Für die a_k gilt dann $a_k = b_k - \beta_k$ und damit

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k\pi} - \frac{4k\pi}{4k^2\pi^2-\pi^2}\right)e^{-4k^2\pi^2 t}\,\sin(k\pi x)\,.$$

b) (Punkte aus alter Klausur)

$$
\begin{aligned}
&u_t - 2u_{xx} = -2xe^{-2t} + \sin(2\pi x)\,, && x \in (0,\,2),\, t > 0\,,\\
&u(x,0) = 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x)\,, && x \in [0,2]\,, \\
&u(0,t) = 1, \qquad u(2,t) = 2e^{-2t}\,, && t \geq 0\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

(i) Homogenisierung der Randdaten:
$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{x}{2}(2e^{-2t} - 1) = u(x,t) - 1 - xe^{-2t} + \frac{x}{2}\,.$
oder
$u(x,t) = v(x,t) + 1 + xe^{-2t} - \frac{x}{2}\,.$ **[1 Punkt]**
Dann gilt:
$u_t = v_t - 2xe^{-2t}, \quad v_{xx} = u_{xx}\,.$ **[1 Punkt]**
Neue DGL:
$v_t - 2xe^{-2t} - 2v_{xx} = -2xe^{-2t} + \sin(2\pi x) \iff \boxed{v_t - 2u_{xx} = \sin(2\pi x)}$
Anfangswerte:
$u(x,0) = v(x,0) + 1 + xe^0 - \frac{x}{2} = 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x) \iff \boxed{v(x,0) = 3\sin(3\pi x)}$
Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(2,t) = 0}$ **[1 Punkt]**

(ii) Wir zerlegen die Aufgabe in zwei Teile:
Die homogene Dgl. mit den vorgegebenen Anfangs– und Randdaten

$$
\begin{aligned}
&v_t^* - 2v_{xx}^* = 0 && x \in (0,2)\,, t \in \mathbb{R}^+,\\
&v^*(x,0) = 3\sin(3\pi x) && x \in [0,2]\,,\\
&v^*(0,t) = v^*(2,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,.
\end{aligned}
$$

und die inhomogene Dgl. mit homogenen Anfangs– und Randdaten

$$
\begin{aligned}
&v_t^{**} - 2v_{xx}^{**} = \sin(2\pi x) && x \in (0,2)\,, t \in \mathbb{R}^+,\\
&v^{**}(x,0) = 0 && x \in (0,2)\,,\\
&v^{**}(0,t) = v^{**}(2,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,.
\end{aligned}
$$

Ansatz: **[1 Punkt]**
Mit $\omega = \frac{\pi}{2}$ und $c = 2$ lautet die Lösung des ersten Problems

$$v^*(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-ck^2\omega^2 t}\, \sin(k\omega x) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

mit

$$v^*(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \sin(\frac{k\pi}{2}x) \stackrel{!}{=} 3\sin(3\pi x)$$

Die $a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 3\sin(3\pi x)\cdot\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx$
sind die Fourierkoeffizienten der Funktion $3\sin(3\pi x)$. Es gilt also
$a_6 = 3$ und $a_k = 0$ sonst **[1 Punkt]**

und damit
$v^*(x,t) \;=\; 3e^{-18\pi^2 t}\,\sin(3\pi x)\,.$ **[1 Punkt]**
Für v^{**} machen wir den Ansatz:

$$v^{**} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin(\frac{k\pi}{2}x)\,, \qquad v_k(0) = 0$$

Einsetzen in die Dgl ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\dot{v}_k(t) + 2\,\frac{k^2\pi^2}{4}v_k(t)\right]\sin(\frac{k\pi}{2}x) \;=\; \sin(\frac{4\pi}{2}x)$$

Damit erhalten wir $v_k(t) \equiv 0$ für $k \neq 4$ und die gewöhnliche Dgl

$$\dot{v}_4(t) + 8\pi^2 v_4(t) \;=\; 1 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

für v_4. Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung lautet

$$v_{4,h}(t) = Ce^{-8\pi^2 t}$$

Der Ansatz $v_4(t) = k$ liefert $\quad k = \dfrac{1}{8\pi^2} \qquad .$

$$v_4(t) = Ce^{-8\pi^2 t} + \frac{1}{8\pi^2} \qquad \text{und mit } v_2(0) = 0 \text{ folgt } C = -\frac{1}{8\pi^2} \;\; \textbf{[1 Punkt]}$$

$$v_4(t) = \frac{1}{8\pi^2}\left(1 - e^{-8\pi^2 t}\right)$$

$$v^{**}(x,t) = \frac{1}{8\pi^2}\left(1 - e^{-8\pi^2 t}\right)\sin(2\pi x) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

und damit gilt

$$v(x,t) = v^*(x,t) + v^{**}(x,t)$$

Aufgabe 2:

Gegeben ist das folgende Neumann Problem

$$\begin{array}{rcll} u_t &=& u_{xx}, & 0<x<1,\, t>0, \\ u(x,0) &=& g(x), & 0<x<1, \\ u_x(0,t) &=& u_x(1,t)=0 & t>0. \end{array}$$

a) Leiten Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes eine Reihendarstellung der Lösung her.

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 1+\cos(2\pi x)$.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

a) Der Ansatz $u(x,t) = v(x)\cdot w(t)$ liefert:
$v'' = \lambda\, v, \quad \dot{w} = \lambda w, \quad v'(0) = v'(1) = 0\,.$
Fallunterscheidung unter der Voraussetzung, dass die Lösung nicht identisch verschwindet:

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Longrightarrow v(x) = \hat{a}_0 + b_0 x, \quad v' = b_0 = 0 \\ &\Longrightarrow v_0(x) = \hat{a}_0\,. \\ \lambda > 0 &\Longrightarrow v(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} \\ &\qquad v'(0) = 0 \Longleftrightarrow a = b \\ &\qquad v'(1) = 0 \Longleftrightarrow a\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \\ &\qquad \Longleftrightarrow (u\equiv 0) \vee (e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}} \Longleftrightarrow \lambda = 0) \qquad \text{Widerspruch !} \\ \lambda < 0 &\Longrightarrow v(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}\,x) \\ &\qquad v'(x) = (\sqrt{-\lambda})(-a\sin(\sqrt{-\lambda}\,x) + b\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) \\ &\qquad v'(0) = 0 \Longleftrightarrow b = 0 \\ &\qquad v'(1) = 0 \Longleftrightarrow (u\equiv 0) \vee (\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_k \;=\; -k^2\pi^2). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$v_k(x) = \cos(k\pi x), \quad k\in\mathbb{N}_0\,.$$

Für die Zeitkomponente rechnet man leicht nach

$$w_k(t) = e^{-k^2\pi^2 t}, \quad k\in\mathbb{N}_0\,.$$

Als Reihendarstellung für die Lösung hat man also

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t}\cos(k\pi x)\,.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten setzt man g gerade und $2-$periodisch fort und bestimmt die Fourierkoeffizienten

$$a_k = 2\int_0^1 g(x)\cos(k\pi x)\,dx\,.$$

b) $g(x) = 1 + \cos(2\pi x) \Longrightarrow a_0 = 2,\ a_2 = 1,\ a_k = 0$ sonst.
$u(x,t) = 1 + e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi x)\,.$

Abgabetermine: 15-18.06.21