Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} + 4u_{xt} + u_{tt} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform $\alpha \cdot \tilde{u}_{\eta\eta} + \beta\tilde{u}_{\tau\tau} = 0$.

c) Wie hängen die neuen Koordinaten η, τ von den alten Koordinaten t, x ab?

Lösung:

$$u_{tt} + 4u_{xt} + u_{xx} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

a) Aus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = -3$$

folgt, dass es sich um eine hyperbolische Differentialgleichung handelt.

b) Eigenwerte von A : $\quad (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 3$

Als Diagonalform erhält man also

$$3\tilde{u}_{\eta\eta} - \tilde{u}_{\tau\tau} = 0$$

(Um die Normalform zu erhalten, müsste man eine weitere Substitution durchführen $\tilde{t} = \tau$, $\tilde{x} = \frac{\eta}{\sqrt{3}}$.)

c) Normierte Eigenvektoren von A:

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalitätseigenschaft bzw. eine analoge Rechnung für λ_2 ergibt

$$(A - \lambda_2 I)w = 0 \Longrightarrow w = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die Transformationsmatrix und die neuen Koordinaten

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \eta \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

also

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - t), \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x).$$

Aufgabe 2:

a) Für welche reellen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$u(x,y) = \sin(4x) \cdot g(y)$$

im gesamten $\mathbb{R}^2$ harmonisch, also eine Lösung der Laplace Gleichung??

b) Bestimmen Sie alle Rotationssymmetrischen Lösungen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } 1 < x^2+y^2 < 9, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9. \end{aligned}$$

Hinweis: Vorlesung Seite 61/62.

c) Sei u eine C^2 Funktion mit

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \qquad \text{für} \quad x^2+y^2 < 4, \\ u(x,y) &= \frac{x+y}{4} \qquad \text{für} \quad x^2+y^2 = 4. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung, mit Hilfe

- des Mittelwertsatzes,
- der Eindeutigkeitsaussage für die Lösung.

Lösungshinweise zu 2:

a) Zu erfüllen ist
$\Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = -16\sin(4x) \cdot g(y) + \sin(4x) \cdot g''(y) = 0.$
Also $g''(y) = 16g(y) \Longrightarrow$
Charakteristisches Polynom: $P(\mu) = \mu^2 - 16.$
Lösungen: $g(y) = c_1 e^{4y} + c_2 e^{-4y}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

b) Wie in der Vorlesung erhält man für rotationssymmetrische Probleme mit $v(r) = u(x(r), y(r)$ und $w = v'$:

$$\begin{aligned} v'' + \frac{2-1}{r}v' = -f(r) = -r^{-1}, &\Longrightarrow w' + \frac{1}{r}w = -r^{-1} \Longrightarrow w_h = \alpha/r, \\ w_p = \alpha(r)/r, &\Longrightarrow \alpha'(r)/r = -1/r \Longrightarrow \alpha'(r) = -1 \Longrightarrow \alpha(r) = -r + c \\ &\Longrightarrow w(r) = -1 + \alpha/r \Longrightarrow v(r) = \alpha\ln(r) - r + \beta \\ &\Longrightarrow u(x,y) = \alpha\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \sqrt{x^2+y^2} + \beta \end{aligned}$$

Die Randdaten liefern für $x^2 + y^2 = 1$:

$$u(x,y) = -1 + \beta = 1 \Longrightarrow \beta = 2$$

und für $x^2 + y^2 = 9$

$$u(x,y) = \alpha\ln(3) - 3 + 2 = 2 \Longrightarrow \alpha = 3/\ln(3)$$

c)
- K_2 sei der Kreis mit Radius 2 um Null und $c(t) = (2\cos\phi,\, 2\sin\phi)$ eine Parametrisierung von K_2. Dann gilt nach der Mittelwerteigenschaft

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi \cdot 2} \int_{K_2} \frac{x+y}{4}\, d(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\cos\phi + 2\sin\phi}{4} \cdot 2\, dt = 0\,.$$

- Die auf dem Rand vorgegebene Funktion löst die Laplace Gleichung auf dem ganzen Raum $\mathbb{R}^2$, also auch auf der vorgegebenen Kreisscheibe. Da die Lösung eindeutig ist, haben wir mit

$$u(x,y) = \frac{x+y}{4}\,, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

bereits die Lösung gefunden und es gilt

$$u(0,0) = \frac{0+0}{4} = 0\,.$$

- **Weitere Alternative:** Poissonsche Integralformel (Seite 59 Vorlesung)

$$u(x,y) = \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi R} \int_{\|z\|=R} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\,\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\,\|^2}\, d\boldsymbol{z}$$

$$u(0,0) = \frac{4}{4\pi} \int_{\|z\|=2} \frac{z_1 + z_2}{16}\, d(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\cos\phi + 2\sin\phi}{4} \cdot 2\, dt = 0\,.$$

Bearbeitung: 01-04.06.21