Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie Entropielösungen der Differentialgleichung $u_t + \left(\frac{u^4}{4}\right)_x = 0$ mit den Anfangsbedingungen

a) $u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ -1 & 0 \le x, \end{cases}$ bzw. **b)** $u(x,0) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & 0 \le x. \end{cases}$

Prüfen Sie Ihre Lösung für die Bereiche, in denen sie nicht konstant ist, durch einsetzen in die Differentialgleichung .

Lösungsskizze zu Aufgabe 1:

a) In Teil a) muss eine Stoßfront $s(t)$ mit

$\dot{s}(t) = \dfrac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \dfrac{\frac{0^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}}{0 - (-1)} = -\frac{1}{4}$ eingeführt werden. Man erhält

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x < s(t) = -\frac{t}{4} \\ -1 & -\frac{t}{4} < x. \end{cases}$$

b) Auf den Charakteristischen Kurven gilt

$\dot{x}(t) = u^3$ und $\dot{u}(t) = 0$.

Die Charakteristiken sind Geraden mit konstanter Steigung $u^3(x(0), 0)$.

Es gilt

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x \le (-1)^3 \cdot t \\ ? & -t \le x \le 0 \\ 0 & x \ge (0)^3 \cdot t \end{cases}$$

In Teil b) muss also eine Verdünnungswelle eingeführt werden. Mit

$f(u) = \frac{u^4}{4} \Longrightarrow f'(u) = u^3 \Longrightarrow g(v) := (f')^{-1}(v) = v^{\frac{1}{3}}$

erhält man die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & x \le -t, \\ g(\frac{x}{t}) = \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{1}{3}} & -t \le x \le 0 \\ 0 & x \ge 0. \end{cases}$$

Probe für den Bereich wo $u(x,t) = (\dfrac{x}{t})^{\frac{1}{3}}$:

$u_t(x,t) = \frac{1}{3} \cdot (\frac{x}{t})^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{-x}{t^2} = -\frac{1}{3} \cdot (\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{4}{3}}})$.

$(f(u))_x = \left(\frac{u^4}{4}\right)_x = \left(\frac{1}{4}\,(\frac{x}{t})^{\frac{4}{3}}\right)_x = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\,(\frac{x}{t})^{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{t} = \frac{1}{3} \cdot (\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{4}{3}}})$.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie den Typ folgender Differentialgleichungen

(i) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u\,,$

(ii) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)\,,$

(iii) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0\,,$

(iv) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \sin(x)(u_x + u_y) = y + x\,,$

(v) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0\,.$

b) Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Zeigen Sie , dass dann auch $v(x,t) := u(cx, c^2t)$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Lösung :

a) (i) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u$

$$2 \cdot 8 - 4^2 = 0 \qquad \text{parabolisch}\,.$$

(ii) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)$

$$1 \cdot 0 - 1 = -1 \qquad \text{hyperbolisch}\,.$$

(iii) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

$$3 \cdot 1 - 1^2 = 2 \qquad \text{elliptisch}\,.$$

(iv) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \ldots = \ldots$

$$1 \cdot e^x - 0^2 > 0 \qquad \text{elliptisch}\,.$$

(v) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0$

$$x^2 + y^2 - (x+y)^2 = -2xy \qquad \begin{cases} \text{parabolisch für} & xy = 0, \\ \text{hyperbolisch für} & xy > 0, \\ \text{elliptisch für} & xy < 0. \end{cases}$$

$$\text{parabolisch} \rightarrow \begin{array}{c|c} \text{ellipt.} & \text{hyp} \\ \hline \text{hyp} & \text{ellipt.} \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$\text{parabolisch}$$

b) Mit $v(x,t) := u(cx, c^2t) =: u(\eta,\tau)$ erhält man

$$v_x = u_\eta \cdot \eta_x + u_\tau \cdot \tau_x = c \cdot u_\eta \implies v_{xx} = c(u_{\eta\eta}\eta_x + u_{\eta\tau}\tau_x) = c^2 u_{\eta\eta}$$

$$v_t = u_\eta \cdot \eta_t + u_\tau \cdot \tau_t = c^2 u_\tau$$

$$\implies v_t - v_{xx} = c^2(u_\tau - u_{\eta\eta}) = 0\,.$$

Abgabetermine: 01-04.06.21