Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + (u+1)^2\, u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ x^3 + 1 & -1 \le x \le 1, \\ 2 & 1 < x. \end{cases}$$

a) Sind die Charakteristiken Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie Gleichungen für die Charakteristiken durch die Punkte $(-2,\ 0)$, $(0,0)$, $(2,0)$ an.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1:

a) Für die Charakteristiken erhält man, einerseits

$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = (u+1)^2$.

Die Steigung der Charakteristiken ist also konstant. Es handelt sich um Geraden.

b) Die Charakteristik durch den Punkt $(x(0),0)$ ist eine Gerade $(x(t),t)$ mit $\dot{x}(t) = (u(x(0),0)+1)^2$. Man erhält

- $x(0) = -2:\ u(-2,0) = 0 \Longrightarrow \dot{x}(t) = (0+1)^2 \Longrightarrow x(t) = -2 + t\,,$
- $x(0) = 0:\ u(0,0) = 1 \Longrightarrow \dot{x}(t) = (1+1)^2 \Longrightarrow x(t) = 4t\,,$
- $x(0) = 2:\ u(2,0) = 2 \Longrightarrow \dot{x}(t) = (2+1)^2 \Longrightarrow x(t) = 2 + 9t\,.$

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Entropielösung der Burgersgleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

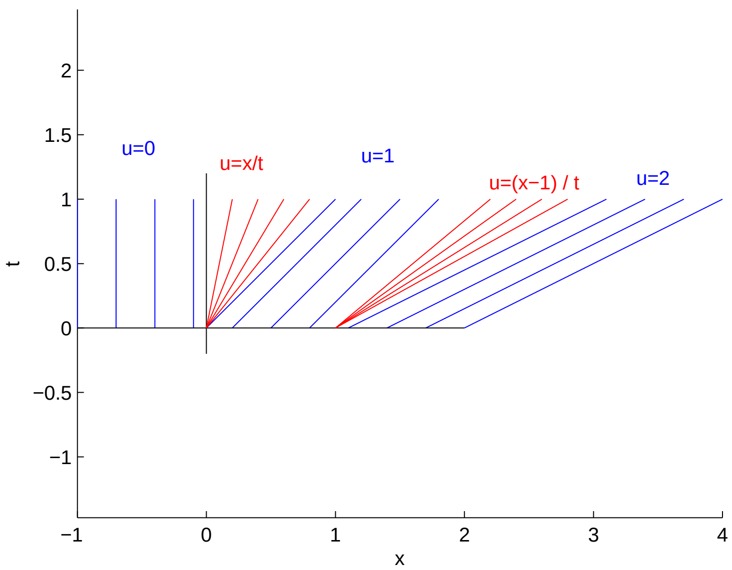
a) $u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$ bzw. **b)** $u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$

Lösungsskizze zu Aufgabe 2:

a) $u_t + uu_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Zwei Verdünnungswellen



$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \le x \le t \\ 1 & t \le x \le t+1 \\ \frac{x-1}{t} & t+1 \le x \le 2t+1 \\ 2 & x \ge 2t+1 \end{cases}$$

b) $u_t + uu_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

2 Stoßwellen:

$s_1(t)$ mit $s_1(0) = 0 \qquad \dot{s}_1(t) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\boxed{s_1(t) = \frac{3}{2}t}$$

$s_2(t)$ mit $s_2(0) = 2 \qquad \dot{s}_2(t) = \frac{0+1}{2} = 1/2$

$$\boxed{s_2(t) = 2 + \frac{t}{2}}$$

für $t = 2$ ist $s_1(t) = s_2(t)$

$\longrightarrow$ neue Stoßwelle

$s_3(t)$ mit $s_3(2) = s_1(2) = s_2(2) = 3 \qquad \dot{s}_3(t) = \frac{2+0}{2} = 1$ also

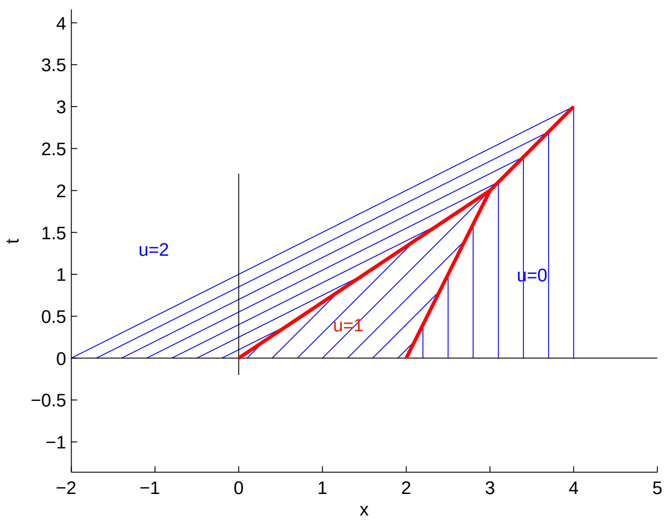
$$\boxed{s_3(t) = t + 1}$$

für $t < 2$

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x < \frac{3}{2}t \\ 1 & \frac{3}{2}t < x < 2 + \frac{t}{2} \\ 0 & x > 2 + \frac{t}{2} \end{cases}$$

für $t \geq 2$

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x < t + 1 \\ 0 & x > t + 1 \end{cases}$$



Bearbeitung: 18-21.05.21