

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1: [4 +2 Punkte]

a) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dabei sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion mit zwei Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen).

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

- (i) Es gibt eine eindeutige schwache Lösung.
- (ii) Zum Erhalt der Entropielösung muss man zwei Stoßwellen einführen.
- (iii) Die Entropielösung gilt für alle Zeiten, also für beliebige $t \in \mathbb{R}^+$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Wie lautet die Sprungbedingung für die schwache Lösung von

$$u_t + (u^3)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 4 & \text{für } x \leq 0, \\ 2 & \text{für } x > 0? \end{cases}$$

Lösungsskizze zur Aufgabe 1:

- a) (i) Die Aussage ist falsch. Erst die Entropiebedingung sorgt für die Eindeutigkeit.
(ii) Falsch. Da die Anfangsdaten monoton steigen, hat die Entropielösung keine Unstetigkeiten.
(iii) Die Aussage ist wahr. Man führt zwei Verdünnungswellen ein, die sich nicht in die Quere kommen.

b) Mit $f(u) = u^3$ lautet die Sprungbedingung für eine Stoßfront:

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{4^3 - 2^3}{4 - 2} = 2 \cdot 16 - 4 = 28.$$

Aufgabe 2:

- a) Bestimmen Sie die Entropielösung der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $t = 2$. Welches neue Problem tritt bei $t = 2$ auf?

Kür: Bestimmen Sie die Lösung für $t > 2$.

- b) Physikalische Prozesse, die durch glatte Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen beschrieben werden, sind im allgemeinem reversibel. Kennt man die Lösungen zu einer bestimmten Zeit, so kann man sie sowohl für spätere als auch für frühere Zeiten angeben.

Zeichnenen Sie die Charakteristiken für die beiden Anfangswertaufgaben für die Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangsdaten

$$u_1(x, 0) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 2x & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

bzw.

$$u_2(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie für beiden Anfangswertaufgaben die Lösung $u(x, 1)$ zum Zeitpunkt $t = 1$.

Was schließen Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der Reversibilität nicht glatter Lösungen der Burger's Gleichung?

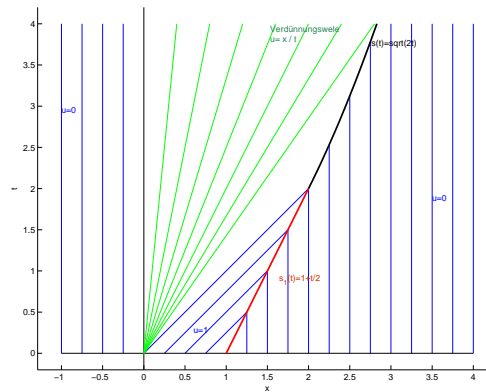
Lösungsskizze zur Aufgabe 2:

- a) $u_t + uu_x = 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Inzwischen ist klar:

- die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken
- die Charakteristiken sind in der (x, t) -Ebene Geraden mit der Steigung $1/u_0$



Zunächst erhalten wir also mit

$$\dot{s}(t) = \frac{1+0}{2}, \quad s(t) = 1 + \frac{t}{2}:$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \leq x \leq t \\ 1 & t \leq x \leq 1 + \frac{t}{2} \\ 0 & x > 1 + \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Diese Lösung gilt bis t^* mit $t^* = 1 + \frac{t^*}{2}$, also $t^* = 2$.

Zum Zeitpunkt $t^* = 2$ trifft die Verdünnungswelle auf die Stoßwelle.

Für $t \geq 2$ gilt für die Unstetigkeit mit

$$u_l = \frac{x}{t}, \quad u_r = 0 \quad \text{und} \quad x = s(t) \quad \text{auf der Unstetigkeitskurve}$$

$$\dot{s}(t) = \frac{\frac{s(t)}{t} + 0}{2} = \frac{s(t)}{2t} \quad \text{Dies ist eine gewöhnliche Dgl. für } s(t)$$

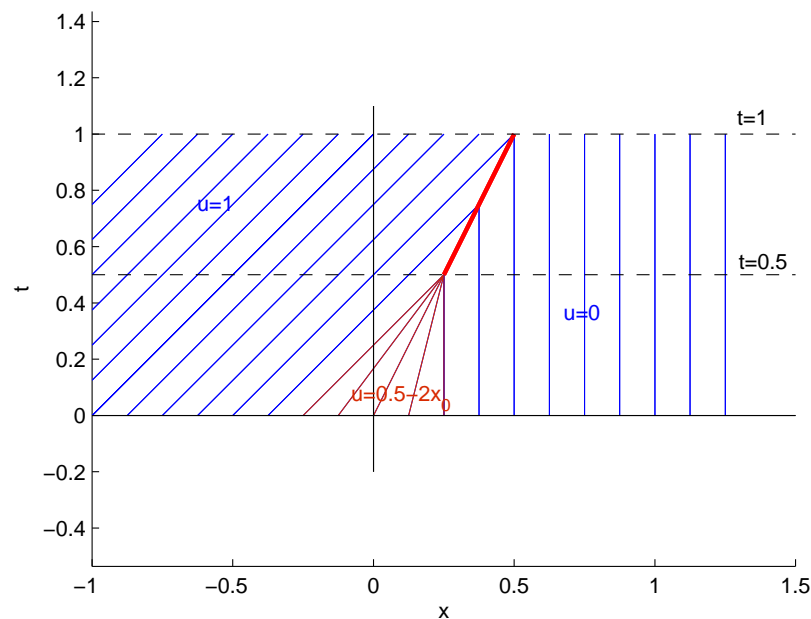
$$\left. \begin{array}{l} \frac{ds}{s} = \frac{dt}{2t} \\ s(2) = 2 \end{array} \right\} \implies s = c\sqrt{t} \implies c = \sqrt{2}, \quad s = \sqrt{2t}$$

Die Unstetigkeit bewegt sich also auf der Kurve $x(t) = \sqrt{2t}$ weiter.

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \leq x \leq \sqrt{2t} \\ 0 & x > \sqrt{2t}. \end{cases}$$

b) $u_t + uu_x = 0$

Die Anfangsdaten $u_1(x, 0) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 2x & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$ liefern:



Auf den Charakteristiken gilt $x - x_0 = u_0 \cdot t$.

Für $-\frac{1}{4} \leq x_0 \leq \frac{1}{4}$ und $t = \frac{1}{2}$ also

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = x_0 + \left(\frac{1}{2} - 2x_0\right) \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Die Charakteristiken, die für $t = 0$ zwischen $x = -\frac{1}{4}$ und $x = \frac{1}{4}$ starten, schneiden sich alle im Punkt $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Für } t = \frac{1}{2} \text{ gilt } u\left(x, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{1}{4} \end{cases} \quad u_l = 1 \quad \forall x < \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad u_r = 0 \quad \forall x > \frac{1}{4}.$$

Es entsteht also eine Stoßwelle mit der Geschwindigkeit

$$\frac{f_l - f_r}{u_l - u_r} = \frac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \frac{1}{2}$$

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Damit gilt für $t > \frac{1}{2}$:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < \frac{t}{2}, \\ 0 & x > \frac{t}{2}. \end{cases}$$

$$u(x, 1) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Zusatz (nicht von den Studierenden verlangt):

Für $t < 0.5$ gilt:

$$u(x, t) = 1 \text{ für } x \leq t - 0.25,$$

$$u(x, t) = 0 \text{ für } x \geq 0.25.$$

Dazwischen, also für $t - 0.25 < x < 0.25$ gilt:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = 0. \text{ D.h. } u \text{ konstant entlang der Charakteristiken und}$$

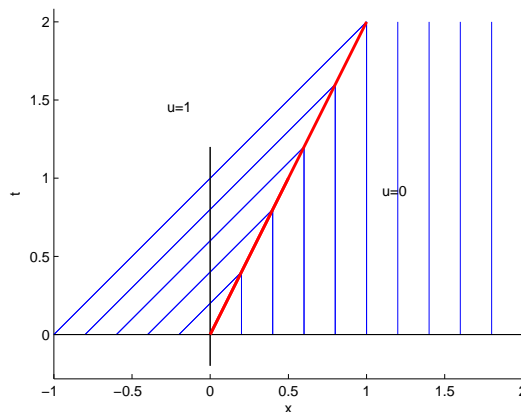
$$x = ut + c \iff c = x(0) = x - ut$$

$$\implies u(x, t) = u_0(x - ut) = \frac{1}{2} - 2(x - ut) \iff u \cdot (1 - 2t) = \frac{1}{2} - 2x$$

$$\text{Also } u(x, t) = \frac{1 - 4x}{2 - 4t} \text{ für } t - 0.25 < x < 0.25, 0 < t < 0.5.$$

Die Anfangsdaten $u_2(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ bereits bekannt
aus Vorlesung

liefern das folgende Bild der Charakteristiken



Hier entsteht von Anfang an eine Stoßwelle mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$, so dass ebenfalls

$$u(x, 1) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

gilt.

Offensichtlich kann man aus Kenntnis der Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$ die Lösung zu früheren Zeiten etwa $t = 0$ nicht rekonstruieren.

Aufgabe 3:

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 1 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x, t)$ = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t ,

$v(x, t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t ,

$q(x, t)$ = Fluß = Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren.

Wir verfeinern unser Modell aus Blatt 1, indem wir eine maximale Dichte und eine maximale Geschwindigkeit

u_{max} = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

v_{max} = maximale Geschwindigkeit

eingeführen. Dies kann z. B. wie folgt geschehen:

$$v(u(x, t)) = v_{max} \left(1 - \frac{u(x, t)}{u_{max}} \right)$$

- Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) auf.
- Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.
- Skizzieren Sie die Charakteristiken für

$$v_{max} = 1 \quad (\text{Hier ist geeignet skaliert worden!})$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l = u_{max}/2 & x < 0 \\ u_r = u_{max} & x > 0 \end{cases} \quad (\text{rote Ampel/ Stau etc.})$$

- Für die Burgers Gleichung hatten wir Stoßwellen nur im Fall $u_l > u_r$ zugelassen. Hier muss offensichtlich eine andere Bedingung her. Woran könnte das liegen?

Hinweis: Eine vollständige Beantwortung der Frage ist nur mit Hilfe der Vorlesungsfolien nicht möglich. Sie können hier nur eine Vermutung äußern!

Lösungshinweis zu Aufgabe 3:

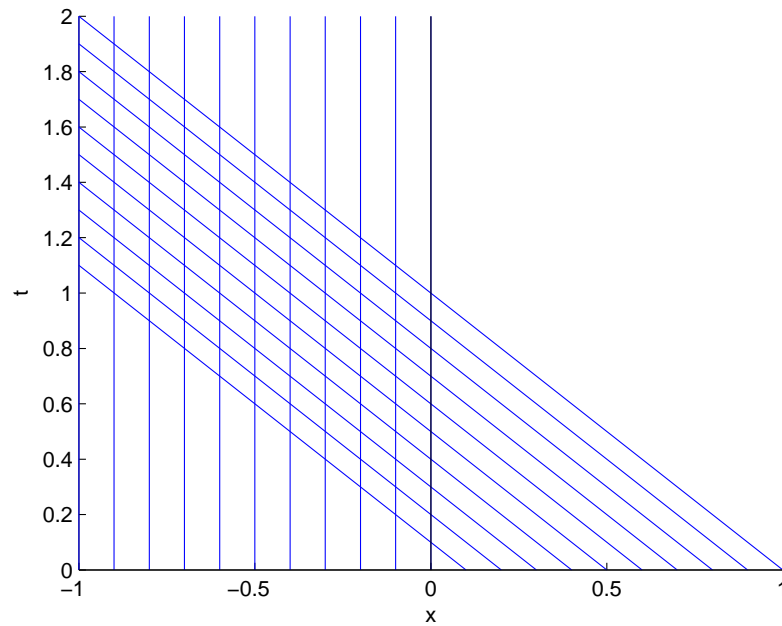
$$a) \quad u_t + \left(v_{max} u \left(1 - \frac{u}{u_{max}} \right) \right)_x = u_t + \left(v_{max} \left(u - \frac{u^2}{u_{max}} \right) \right)_x = u_t + \left(v_{max} \left(1 - \frac{2u}{u_{max}} \right) \right) u_x = 0$$

- Auf den Charakteristiken $x(t)$ gilt:

$$\dot{x}(t) = \left(v_{max} \left(1 - \frac{2u}{u_{max}} \right) \right) \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = 0.$$

Die Charakteristik durch einen Punkt $(x(0), 0)$ hat als Gerade in der $x-t$ -Ebene die konstante Steigung $\left(v_{max} \left(1 - \frac{2u(x(0), 0)}{u_{max}} \right) \right)^{-1}$. Damit sind die Charakteristiken wieder Geraden.

c) Skizze der Charakteristiken:



d) Die Entropiebedingung der Vorlesung gilt nur für konvexe Flußfunktionen f (hier q). Da f' in unserem Fall monoton fallend ist, gilt die Entropiebedingung aus der Vorlesung nicht.

Was immer noch gilt ist die Anschauliche Interpretation : Aus der Stoßwelle kommt keine Information raus!! Also

$$f'(u_l) > \dot{s} > f'(u_r)$$

Da f' monoton fallend ist, ergibt sich für Stoßwellen die Bedingung $u_l < u_r$.