Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertaufgaben für $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$.

a) $u_t + 3u_x = 0 \quad \text{mit} \quad u(x,0) = xe^{-x}.$

b) $2u_t + x^2 u_x = \dfrac{1}{u} \quad \text{mit} \quad u(x,0) = 2\sqrt{e^{-4x^2}}\,.$

Existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$?

Wenn nicht, kann die Lösung in den Definitionslücken stetig ergänzt werden?

Lösung zu 1:

a) $u_t + 3u_x = 0 \qquad \text{mit} \quad u(x,0) = xe^{-x}.$

Auf einer festen Charakteristik $(t, x(t))$ gilt:

$\dot{x}(t) = 3 \implies x(t) = c + 3t,\ x(0) = c = x_0 = x - 3t\,.$

$\dot{u}(t) = 0 \implies u$ ist auf der Charakteristik konstant!

Also

$$\implies \begin{cases} u(x,t) &= u(x_0,0) = u(x-3t,0) = u_0(x-3t) \\ u(x,0) &= xe^{-x} \end{cases}$$

$$\implies u(x,t) = (x-3t)e^{-(x-3t)}$$

b) Für $x = 0$ erhält man die gewöhnliche Dgl. $2u_t = \dfrac{1}{u}$ mit der Lösung $u(0,t) = \sqrt{t+C}$. Der Anfangswert liefert $C = 4$. Für $x \neq 0$ rechnet man wie folgt.

$$\begin{array}{llll} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{2} & \dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dt}{2} & -\dfrac{1}{x} = \dfrac{t}{2} - C_1 & C_1 = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{2u} & 2u \cdot du = dt & u^2 = t + C_2 & C_2 = u^2 - t \end{array}$$

$$C_2 = f(C_1) \iff u^2 - t = f\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{x}\right)$$

Aus den Anfangsdaten folgt

$$(u(x,0))^2 - 0 = 4\,e^{-4x^2} = f(\frac{1}{x})\,.$$

Also

$$f(y) \;=\; 4\,e^{-4(1/y)^2} \implies u^2 = t + 4\exp\left(-4(\frac{t}{2} + \frac{1}{x})^{-2}\right)$$

$$u(x,t) = \sqrt{t + 4\exp\left(-4(\frac{(2x)^2}{(tx+2)^2}\right)} = \sqrt{t + 4e^{\frac{-16x^2}{(tx+2)^2}}}\,.$$

Die Lösung ist für $x(t) = -2/t$ nicht definiert. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}^+$ gilt aber $x^2 = 4/t^2 \neq 0$ und

$$\lim_{x\to -2/t} \frac{-16x^2}{(tx+2)^2} = -\infty \implies \lim_{x\to -2/t} e^{\frac{-16x^2}{(tx+2)^2}} = 0$$

und damit

$$\lim_{x\to -2/t} u(x,t) \;=\; \sqrt{t}\,,$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie eine stetige Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= x, \qquad x,t > 0 \\ u(x,0) &= x \qquad (x \geq 0) \\ u(0,t) &= t \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode. Bestimmen Sie dazu jeweils die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x,0) = x$, $(\forall x)$ bzw. zur Randbedingung $u(0,t) = t$, $(\forall t)$ und setzen Sie diese Lösungen stetig zusammen. Ist die so gewonnene Lösung für alle $x,t \geq 0$ partiell differenzierbar?

Lösung zu 2:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 1 \implies x(t) = t + C_1 \implies C_1 = x - t \\ &\frac{du}{dt} = x = C_1 + t \implies u = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \implies C_2 = u - \frac{t^2}{2} - (x-t)t \end{aligned}$$

Im Falle der Auflösbarkeit:

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \implies u + \frac{t^2}{2} - xt = f(x-t).$$

Für die vorgegebenen Anfangswerte erhalten wir also die Lösung u_A :

$$u_A(x,0) = u(x,0) = f(x) = x \implies u_A(x,t) = (x-t) + xt - \frac{t^2}{2}$$

u_A erfüllt die Dgl und die Anfangswerte. Es gilt allerdings $u(0,t) = -t - \frac{t^2}{2}$. Die Randbedingung ist also nur für $t = 0$ erfüllt.

Wir gehen wieder von der allgemeinen Lösung

$$u = f(x-t) - \frac{t^2}{2} + xt$$

aus und passen an die Randdaten $u(0,t) = t$ an.

$$t = f(-t) - \frac{t^2}{2} \implies f(t) = \frac{t^2}{2} - t \implies u_R(x,t) = \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) - \frac{t^2}{2} + xt$$

Wenn wir die Lösungen stetig zusammensetzen wollen, müssen wir eine Kurve finden längs der $u_A = u_R$ gilt:

$$\begin{aligned} u_A(x,t) = (x-t) + xt - \frac{t^2}{2} &\stackrel{!}{=} \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) - \frac{t^2}{2} + xt = u_R(x,t) \\ \iff (x-t) &\stackrel{!}{=} \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) \iff (x-t)\left(2 - \frac{(x-t)}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0\,. \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt wenn $x = t$ oder $x = t + 4$ gilt. Wegen der Anfangs-/Randwerte setzen wir entlang der Geraden $x = t$ zusammen.

$$u(x,t) := \begin{cases} (x-t) + xt - \dfrac{t^2}{2} & x \geq t \\ \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) + xt - \frac{t^2}{2} & x \leq t\,. \end{cases}$$

Wie man leicht nachrechnet, machen die partiellen Ableitungen hier Sprünge. Die zusammengesetzte Funktion ist also nicht partiell differenzierbar.

Abgabe bis: 30.04.21