Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (Wiederholung Analysis II)

Für die Ableitung Parameterabhängiger Integrale gilt bei hinreichender Glattheit von f die **Leibniz–Regel** :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} f(x,t)dt + b'(x)\,f(x,b(x)) - a'(x)\,f(x,a(x))}$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $F(x)$ definiert durch

$$F(x) := \int\limits_{-x}^{x^2} e^{xt}\,dt$$

und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} F'(x)$.

Lösung zu 1:

$$F(x) = \int\limits_{-x}^{x^2} e^{xt}\,dt\,, \qquad b(x) := x^2,\ a(x) := -x,\ f(t,x) := e^{xt}$$

$$\begin{aligned} b'(x) &= 2x & a'(x) &= -1 \\ f(b(x),x) &= e^{x^3} & f(a(x),x) &= e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,dt + b'(x)f(b(x),x) - a'(x)f(a(x),x) \\
&= \int\limits_{-x}^{x^2} te^{xt}\,dt + 2x\,e^{x^3} + e^{-x^2} \\
&= \left[\frac{t}{x}e^{tx}\right]_{-x}^{x^2} - \int\limits_{-x}^{x^2} \frac{1}{x}e^{xt}\,dt + 2x\,e^{x^3} + e^{-x^2} \\
&= 3x\,e^{x^3} + 2e^{-x^2} - \frac{1}{x^2}\left[e^{tx}\right]_{-x}^{x^2} = 3x\,e^{x^3} + 2e^{-x^2} - \frac{1}{x^2}\left(e^{x^3} - e^{-x^2}\right)
\end{aligned}
$$

Einsetzen/ l'Hospital ergibt:

$$
F'(0) = 0 + 2 - \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(e^{x^3} - e^{-x^2}) = 2 - \lim_{x\to 0} \frac{3x^2e^{x^3} + 2xe^{-x^2}}{2x} = 2 - 1 = 1\,.
$$

Aufgabe 2:

Ein einfaches Verkehrsflussmodell:

Wir betrachten einen eindimensionalen Fluss von Fahrzeugen entlang einer unendlich langen, einspurigen Fahrbahn. In einem sogenannten makroskopischen Modell betrachtet man nicht einzelne Fahrzeuge, sondern den Gesamtfluss der Fahrzeuge. Dazu führen wir folgende Größen ein :

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \text{(Längen-)Dichte der Fahrzeuge im Punkt } x \text{ zum Zeitpunkt } t \\
&= \text{Fahrzeuge/Längeneinheit im Punkt } x \text{ zum Zeitpunkt } t \\
v(x,t) &= \text{ Geschwindigkeit im Punkt } x \text{ zum Zeitpunkt } t, \\
q(x,t) &= u(x,t)\cdot v(x,t) = \text{ Fluss} \\
&= \text{ Anzahl Fahrzeuge, die } x \text{ zum Zeitpunkt } t \text{ pro Zeiteinheit passieren.}
\end{aligned}
$$

a) Nehmen Sie an, dass es keine Ein– bzw. Ausfahrten gibt, dass keine Fahrzeuge verschwinden, und dass keine neuen Fahrzeuge hinzukommen. Sei $N(t,a,\Delta a) :=$ Anzahl Fahrzeuge auf einem Ortsintervall $[a, a+\Delta a]$ zum Zeitpunkt t. Machen Sie sich klar, dass dann einerseits

$$N(t,a,\Delta a) \;=\; \int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\,dx$$

gilt und andererseits

$$N(t,a,\Delta a) - N(t_0,a,\Delta a) \;=\; \int_{t_0}^{t} q(a,\tau) - q(a+\Delta a,\tau)d\tau\,.$$

Leiten Sie hieraus die sogenannte Erhaltungsgleichung für die Masse (Anzahl Fahrzeuge)

$$u_t + q_x = 0$$

her.

Tipps zum Vorgehen:

- Leiten Sie beide Formeln für N nach t ab. Beachten Sie dabei, dass für die Ableitung Parameterabhängiger Integrale bei hinreichender Glattheit von f die folgende **Leibniz–Regel** gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt \;=\; \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} f(x,t)dt \;+\; b'(x)\,f(x,b(x)) \;-\; a'(x)\,f(x,a(x))}$$

- Teilen Sie durch Δa.
- Betrachten Sie den Grenzfall $\Delta a \to 0$.

b) Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Geschwindigkeit nur von der Dichte abhängt: $v = v(u)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dq}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; 0$$

die Erhaltung der Masse beschreibt.

c) Wir nehmen nun in einem ersten einfachen Modell an, dass die Geschwindigkeit umgekehrt proportional zur Dichte wächst und die Dichte positiv ist.

$$v(x,t) \;=\; c + \frac{k}{u(x,t)}$$

Wie lautet die Kontinuitätsgleichung (=Erhaltungsgleichung für die Masse)?

d) Zu lösen sei die in Teil c) hergeleitete Kontinuitätsgleichung mit $c = 3$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = e^{-x^2}$.

Zeigen Sie, dass jede hinreichend glatte Funktion $u(x,t) = f(x-ct)$ die Differentialgleichung löst.
Bestimmen Sie f so, dass auch die Anfangsbedingung erfüllt wird.

Lösung:

a) Es gilt einerseits: $\quad N(t) \;=\; \int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\,dx$

und andererseits: $\quad N(t) - N(t_0) \;=\; \int_{t_0}^{t} q(a,\tau) - q(a+\Delta a,\tau)d\tau$

Ableiten nach t ergibt: $\dfrac{\partial}{\partial t} N(t) \;=\; \dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\,dx = \; q(a,t) - q(a+\Delta a,t)$

Lässt man nun Δa gegen Null gehen, so folgt bei hinreichender Glattheit der beteiligten Funktionen

$$\lim_{\Delta a\to 0} \frac{1}{\Delta a}\int_a^{a+\Delta a} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\,dx = \lim_{\Delta a\to 0} -\frac{q(a+\Delta a,t) - q(a,t)}{\Delta a}$$

$$\Longrightarrow \;\frac{\partial}{\partial t} u(a,t) = \,-\,\frac{\partial}{\partial a} q(a,t)$$

Da diese Überlegungen in jedem Punkt gelten, folgt die Kontinuitätsgleich. $u_t + q_x = 0$.

b) Eigentlich klar, denn in diesem Fall ist $q(x,t) = u(x,t)\cdot v(u(x,t))$. Der Fluß q ist also eine Funktion von $u(x,t)$. Aus der Kettenregel folgt dann die Behauptung.

Etwas ausführlicher:

Mit $q(x,t) = u(x,t)\cdot v(u(x,t))$ gilt einerseits

$$\frac{dq}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{d}{du}\,(u\cdot v(u))\cdot u_x = \;(v(u) + u\cdot v_u)\cdot u_x$$

und andererseits

$$\frac{\partial}{\partial x}\,q(x,t) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\;(u(x,t)\cdot v(u(x,t))) \;= u_x\cdot v(u) + u\cdot v_u\cdot u_x\,.$$

c)
$$v(x,t) \;=\; c \,+\, \frac{k}{u(x,t)} \qquad q(x,t) = \; c \cdot u(x,t) \,+\, k$$

Nach Teil b) lautet die Kontinuitätsgleichung also

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dq}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Man erhält also die lineare Transportgleichung.

d) Nach Teil c) ist die Gleichung

$u_t + 3u_x + = 0$

zu lösen.

Mit dem Ansatz $u(x,t) = f(x-3t)$ gilt

$u_t(x,t) = f'(x-3t) \cdot (-3), \qquad u_x(x,t) = f'(x-3t)$

und damit $u_t + 3u_x \;=\; 0\,.$

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = f(x) \overset{!}{=} e^{-x^2} \Longrightarrow u(x,t) \;=\; f(x-3t) \;=\; e^{-(x-3t)^2}.$

Bemerkung : Dies ist ein sehr einfaches, linearisiertes Modell. Es lässt z.B. beliebig hohe Dichte und beliebig hohe Geschwindigkeit zu. Bei einem etwas realistischerem Problem würden sich hier schon Schockwellen und Verdünungswellen ergeben (siehe Blatt 3).

Abgabe bis: 16.04.21