Fachbereich Mathematik **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur Differentialgleichungen II

01. März 2022

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: [5 Punkte]

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t - \sin(t)\, u_x &= \cos(t)\,, & x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \exp(-x^2) = e^{-x^2} & x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Lösung: Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

$\frac{dx}{dt} = -\sin(t) \Longrightarrow dx = -\sin(t)dt \Longrightarrow x = \cos(t) + C_1$ **[1 Punkt]**

$\frac{du}{dt} = \cos(t) \Longrightarrow du = \cos(t)dt \Longrightarrow u = \sin(t) + C_2\,.$ **[1 Punkt]**

Mit $C_1 = x - \cos(t)$ und $C_2 = u - \sin(t)$ machen wir den Ansatz

$C_2 = f(C_1)$

und erhalten

$u - \sin(t) = f(x - \cos(t))$

und damit die allgemeine Lösung: $u(x,t) = \sin(t) + f(x - \cos(t))$. **[1 Punkt]**

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = \sin(0) + f(x - \cos(0)) = f(x-1) \stackrel{!}{=} e^{-x^2}\,.$

Also $f(\mu) = e^{-(\mu+1)^2}$ **[1 Punkt]**

$u(x,t) = \sin(t) + e^{-(x-\cos(t)+1)^2}$. **[1 Punkt]**

Aufgabe 2: [6= 2+1+2+1 Punkte]

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

A) $u_t + 20\, u_x = 21u\,.$

B) $u_t + 20u\, u_x = 21\,.$

C) $u_t - 5u^2\, u_x = 0.$

D) $u_t + 5(x+1)\, u_x = 0.$

versehen mit der Anfangsbedingung

$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R},$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A, B, C, D gelten für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe die folgenden Aussagen i) und/oder ii)?

i) Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken.
ii) Die Charakteristiken sind Geraden.

Begründen Sie Ihre Antworten. Beachten Sie, dass Sie keine Lösungen berechnen müssen!

Lösung zu 2:

Für A) gilt

$\frac{du}{dt} = 21u \Longrightarrow u$ ist also nicht konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\quad \frac{dx}{dt} = 20\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist also Konstant. Es handelt sich um Geraden.

Für B) gilt

$\frac{du}{dt} = 21 \Longrightarrow u$ ist also nicht konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\quad \frac{dx}{dt} = 20u\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist also nicht Konstant. Es handelt sich nicht um Geraden.

Für C) gilt

$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\quad \frac{dx}{dt} = -5u^2\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist also Konstant. Es handelt sich um Geraden.

Für D) gilt $\quad \frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Die Charakteristiken haben die Steigung $\quad \frac{dx}{dt} = 5(x+1)\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist nicht Konstant. Es handelt sich nicht um Geraden.

Aufgabe 3: [5+3+1 Punkte]

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
u_{tt} - 16u_{xx} &= -\frac{8x}{\pi}\sin(2t) && \text{für } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}), t > 0,\\
u(x,0) &= 1 + 2\sin(2x) + 4\sin(8x)\,, && \text{für } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\\
u_t(x,0) &= \frac{4x}{\pi}\,, && \text{für } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\\
u(0,t) = 1, \quad u(\tfrac{\pi}{2},t) &= 1 + \sin(2t) && \text{für } t > 0.
\end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

Hinweis: Bei korrekter Anwendung der Methode aus der Veranstaltung ensteht eine homogene Differentialgleichung für die neue Funktion.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned}
w_{tt} - 16w_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}), t > 0,\\
w(x,0) &= 2\sin(2x) + 4\sin(8x) && \text{für } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\\
w_t(x,0) &= 0 && \text{für } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\\
w(0,t) = 0, \quad w(\tfrac{\pi}{2},t) &= 0 && \text{für } t > 0.
\end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Lösung:

a) Homogenisierung:

$$w(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{x}{\frac{\pi}{2}}(1 + \sin(2t) - 1) = u(x,t) - 1 - \frac{2x}{\pi}\sin(2t)\,.$$

oder

$$u(x,t) = w(x,t) + 1 + \frac{2x}{\pi}\sin(2t)\,. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dann gilt:

$$u_t = w_t + \frac{4x}{\pi}\cos(2t), \qquad u_{tt} = w_{tt} - \frac{8x}{\pi}\sin(2t)$$

und $w_{xx} = u_{xx}$ **[1 Punkt]**

Neue DGL: $\quad w_{tt} - \dfrac{8x}{\pi}\sin(2t) - 16w_{xx} = -\dfrac{8x}{\pi}\sin(2t) \Longleftrightarrow$

$\boxed{w_{tt} - 16w_{xx} = 0}$ **[1 Punkt]**

Anfangswerte:

$$w(x,0) = u(x,0) - 1 - \frac{2x}{\pi}\sin(0) = 1 + 2\sin(2x) + 4\sin(8x) - 1,$$

$$w_t(x,0) = u_t(x,0) - \frac{4x}{\pi}\cos(0) = \frac{4x}{\pi} - \frac{4x}{\pi},$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\boxed{w(x,0) = 2\sin(2x) + 4\sin(8x)\,, \qquad w_t(x,0) = 0\,.}$

Randwerte :

$\boxed{w(0,t) = w(\tfrac{\pi}{2},t) = 0\,.}$ **[2 Punkte]**

b) **[3 Punkte]**

Mit $\omega = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$ und $c = 4$ gilt:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right]\sin(k\omega x)$$

$$w(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2kx) \overset{!}{=} 2\sin(2x) + 4\sin(8x)$$

$$w_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} ck\omega \cdot B_k \sin(2kx) \overset{!}{=} 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$\Longrightarrow A_1 = 2,\ A_4 = 4,\ A_k = 0 \qquad \forall k \notin \{1,4\}, \qquad$ und $B_k = 0,\ \forall k\,.$

$w(x,t) = 2\cos(8t)\sin(2x) + 4\cos(32t)\sin(8x)\,.$

c) **[1 Punkt]** Für die Lösung von a) erhalten wir

$$u(x,t) = 2\cos(8t)\sin(2x) + 4\cos(32t)\sin(8x) + 1 + \frac{2x}{\pi}\sin(2t)\,.$$