Fachbereich Mathematik **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur zur Mathematik IV
(Modul: Differentialgleichungen II)
01. März 2022

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI CS	ET	GES	IIW IN	MB	MTB	SB	

Wertung nach PO : Als Mathematik IV ☐ Einzelwertung DGL II ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: [5 Punkte]

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t - \sin(t)\, u_x &= \cos(t)\,, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \exp(-x^2) = e^{-x^2} & x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: [6 Punkte]

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

A) $u_t + 20\, u_x = 21u\,.$
B) $u_t + 20u\, u_x = 21\,.$
C) $u_t - 5u^2\, u_x = 0.$
D) $u_t + 5(x+1)\, u_x = 0.$

versehen mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A, B, C, D gelten für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe die folgenden Aussagen i) und/oder ii)?

i) Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken.
ii) Die Charakteristiken sind Geraden.

Begründen Sie Ihre Antworten. Beachten Sie, dass Sie keine Lösungen berechnen müssen!

Aufgabe 3: [5+3+1 Punkte]

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 16u_{xx} &= -\frac{8x}{\pi}\sin(2t) && \text{für } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}), t > 0,\\
u(x,0) &= 1 + 2\sin(2x) + 4\sin(8x)\,, && \text{für } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\\
u_t(x,0) &= \frac{4x}{\pi}\,, && \text{für } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\\
u(0,t) = 1, \quad u(\tfrac{\pi}{2}, t) &= 1 + \sin(2t) && \text{für } t > 0.
\end{aligned}
$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

Hinweis: Bei korrekter Anwendung der Methode aus der Veranstaltung ensteht eine homogene Differentialgleichung für die neue Funktion.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$
\begin{aligned}
w_{tt} - 16w_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}), t > 0,\\
w(x,0) &= 2\sin(2x) + 4\sin(8x) && \text{für } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\\
w_t(x,0) &= 0 && \text{für } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\\
w(0,t) = 0, \quad w(\tfrac{\pi}{2}, t) &= 0 && \text{für } t > 0.
\end{aligned}
$$

c) Geben Sie die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.